Die Grassmann Homologie

Diplomarbeit
bei
Prof. V. Welker

vorgelegt von Jan Brähler am
Fachbereich Mathematik der
Philipps-Universität Marburg

Marburg, den 5. August 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die explorative Untersuchung einer Variante der Grassmann Homologie, die zunächst 1991 von Wolfram Gerdes im Zusammenhang zur Homologie Genereller Linearer Gruppen und damit mit der algebraischen K-Theorie beschrieben wurde.

Dabei handelt es sich um die Homologie des Grassmannschen G-Kettenkomplexes zu den Parametern Körper $\mathbb{F}$ und Co-Dimension p, der von einer Teilmenge der aus linearen Unterräumen des $\mathbb{F}^{k+p}$ bestehenden Grassmannschen - dem sogenannten generischen Stratum - und dem Schnittverhalten der Elemente dieser mit den kanonischen Koordinatenhyperebenen $\{x \in \mathbb{F}^{k+p} | x_i = 0\}_{1 \leq i \leq (k+p)}$ erzeugt wird.

Im Verlauf dieser Arbeit wollen wir den G-Kettenkomplex und die zugehörigen Begriffe wie Koordinatensimplex, Transversalität, generisches Stratum der Grassmannschen und Schnittabbildungen genau definieren. Wir werden mit generischen und supergenerischen Matrizen zwei spezielle Matrizentypen vorstellen und eine direkte Relation dieser zu dem generischen Stratum der Grassmannschen und damit zu der Grassmann Homologie herstellen. Daraus resultierend werden wir in engem Rahmen einige Aussagen zu Komplexlänge, Eulercharakteristik und den Rängen der Kettengruppen treffen.

Als Kernpunkt wird die Grassmann Homologie zur Co-Dimension $p = 1$ für sämtliche endliche Körper unter Anwendung diskreter Morsetheorie nach [JW] explizit berechnet. Desweiteren werden andere Varianten der Grassmann Homologie kurz vorgestellt und in Relation zu dem hier beschriebenen Typ gesetzt. Zusätzlich werden wir das generische Stratum der Grassmannschen als Varietät interpretieren und einige der in [Ha] beschriebenen Zeta-Funktionen konkret angeben.

Allen, die mich während der Zeit des Schreibens der Diplomarbeit unterstützt haben, möchte ich ganz herzlich danken. Besonderer Dank gilt Volkmar Welker für die intensive Betreuung der Arbeit mit zahlreichen interessanten und inspirierenden Gesprächen, Daniel Soll für seinen technischen Beistand sowie meiner Familie und meinen Freunden für 'nicht-mathematische' Unterstützung.

Kapitel 2

Grundbegriffe

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst grundlegende Notationen vereinbaren. Ziel ist es, die wichtigsten Begriffe, welche später die Definition des zentralen Objekts dieser Arbeit - der Grassmann Homologie - ermöglichen, zu beschreiben.

2.1 Mengenschreibweisen

Zunächst wollen wir Vereinbarungen bezüglich grundlegender Mengenschreibweisen treffen. Es bezeichne für eine beliebige endliche Menge X der Ausdruck $\#X$ die Anzahl der Elemente von X. Für eine Menge X sei

$$\binom{X}{k} := \{I \subset X | \#I = k\}$$

die Menge aller k-elementigen Teilmengen von X und

$$2^X := \{I \subset X\}$$

die Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Ist $n \in \mathbb{N}_+$ eine positive, natürliche Zahl, so schreiben wir $[n]$ für die Menge der ersten n positiven, natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, n\}$. Für eine Teilmenge $I \in 2^{[n]}$ bezeichne $\overline{I} := [n] \backslash I$ das Komplement von I in $[n]$. Speziell für $k \leq n$ gilt dementsprechend: $\overline{[k]} = \{k+1, \ldots, n\}$.

2.2 Der Koordinatensimplex

Im Folgenden verstehen wir unter $\mathbb{F}$ stets einen beliebigen Körper und im Speziellen unter $\mathbb{F}_q$ einen endlichen Körper mit genau q Elementen, wobei q eine Primzahlpotenz ist. Von besonderem Interesse sind folgende speziellen Unterräume des kanonischen n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{F}^n$ über $\mathbb{F}$:

Zu einem festen Körper $\mathbb{F}$ und $i \in [n]$ sei

$$\Delta_i := \Delta_i^n \mathbb{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \middle| x_i = 0 \right\}$$

die i-te KOORDINATENHYPEREBENE des $\mathbb{F}^n$, bestehend aus allen Punkten, deren i-te Koordinate verschwindet.

Erweitert bezeichne zu einer Teilmenge $I \in 2^{[n]}$

$$\Delta_I := \Delta_I^n \mathbb{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \middle| x_i = 0 \text{ für alle } i \in I \right\}$$

die entsprechende SEITE DES KOORDINATENSIMPLEX.

Bemerkung 2.2.1. *(Elementare Eigenschaften der Schnitte der Koordinatenhyperebenen) Die Koordinatenseiten*

(1) Die Co-Dimension eines Unterraums Δ_I^n bzgl. des $\mathbb{F}^n$ entspricht der Anzahl der Elemente von I. Die Dimension von Δ_I^n ist dementsprechend gleich $(n - \#I)$.

(2) Es gilt stets $\Delta_{(I \cup P)}^n = \Delta_I^n \cap \Delta_P^n$ und demgemäß $\Delta_I^n = \bigcap_{i \in I} \Delta_i^n$.

(3) Wir erhalten eine Umkehrung der Enthaltensrelationen: $P \subset I \Longleftrightarrow \Delta_I^n \subset \Delta_P^n$.

Beispiel 2.2.2. *Über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entspricht $\Delta_{\{1,3\}}^3$ der x_2-Achse, über dem Körper $\mathbb{F}_2$ ist $\Delta_{\{2,3\}}^4 = \Big\{\{0,0,0,0\}, \{0,0,0,1\}, \{1,0,0,0\}, \{1,0,0,1\}\Big\}$.*

Zwei lineare Unterräume $U, V \subset \mathbb{F}^n$ heißen genau dann TRANSVERSAL ZUEINANDER, wenn $\dim(U \cap V) = \max\{0, \dim(U) + \dim(V) - n\}$. Wir schreiben dazu abkürzend $U \blacktriangledown V$.

Bemerkung 2.2.3. *(Elementare Eigenschaften transversaler Unterräume)*

(1) Die Transversalitäts-Eigenschaft zwischen zwei Unterräumen U und V des $\mathbb{F}^n$ ist gleichbedeutend damit, dass sich die Co-Dimensionen im gemeinsamen Durchschnitt addieren beziehungsweise maximal sind, d.h. dass gilt
$\operatorname{codim}(U \cap V) = \min\{n, \operatorname{codim}(U) + \operatorname{codim}(V)\}$.

(2) Aufgrund von $n \geq \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ gilt für beliebige Unterveektorräume U und V stets: $\dim(U \cap V) \geq \max\{0, \dim(U) + \dim(V) - n\}$ bzw. analog $\operatorname{codim}(U \cap V) \leq \min\{n, \operatorname{codim}(U) + \operatorname{codim}(V)\}$. Das Eintreten einer echten Gleichheit bedeutet Transversalität.

(3) Abgesehen von den trivialen Unterräumen - dem Vektorraum $\mathbb{F}^n$ an sich und dem Nullvektorraum - liegt ein Unterraumraum niemals transversal zu sich selbst.

Die Menge

$$KS_*^n\mathbb{F} := \left\{\Delta_I^n \middle| I \in 2^{[n]}\right\}$$

bezeichne den sogenannten KOORDINATENSIMPLEX des $\mathbb{F}^n$, bestehend aus sämtlichen Schnitten der Koordinatenhyperebenen. Speziell sei

$$KS_k^n\mathbb{F} := \left\{\Delta_I^n \middle| I \in \binom{[n]}{k}\right\}$$

die Menge der Seiten mit Co-Dimension k.

Bemerkung 2.2.4. *Die Anzahl der Elemente des Koordinatensimplex ist unabhängig vom Grundkörper $\mathbb{F}$:*

$$\#\left(KS_*^n\mathbb{F}\right) = 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\#\left(KS_k^n\mathbb{F}\right).$$

Es ist zu beachten, dass es sich hierbei nicht um einen Simplex im topologischen Sinne handelt. Jedoch entspricht der Koordinatensimplex als Verband bezüglich der (umgedrehten) Enthaltensrelation dem formalen Simplex $2^{[n]}$ über der Eckenmenge $[n]$, indem man jede $(k-1)$-dimensionale Facette $I \in \binom{[n]}{k} \subset 2^{[n]}$ mit der Koordinatenseite $\Delta_I^n \in KS_k^n\mathbb{F} \subset KS_*^n\mathbb{F}$ identifiziert.

2.3 Das generische Stratum der Grassmannschen

Wir wollen zunächst kurz den klassischen Begriff der Grassmannschen festlegen: Zu gegebenem Grundkörper $\mathbb{F}$ sowie für gegebene $0 \leq k \leq n$ sei mit

$$G_k^n\mathbb{F} := \left\{U \subset \mathbb{F}^n \middle| U\ k\text{-dimensionaler linearer Untervektorraum}\right\}$$

die k-te GRASSMANNSCHE des $\mathbb{F}^n$ bezeichnet.

Bemerkung 2.3.1. *Es gilt $KS_{n-k}^n\mathbb{F} \subset G_k^n\mathbb{F}$.*

Im Folgenden von besonderer Bedeutung ist für uns ein ganz spezieller Teil der Grassmannschen. Wir schreiben

$$\hat{G}_k^n\mathbb{F} := \left\{U \in G_k^n\mathbb{F} \middle| U \blacktriangledown \Delta \text{ für } \Delta \in KS_*^n\mathbb{F}\right\}$$

für das GENERISCHE STRATUM der Grassmannschen. Das generische Stratum besteht aus genau jenen k-dimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{F}^n$, die zu sämtlichen 2^n Seiten des Koordinatensimplex transversal liegen. Einen k-dimensionalen linearen Unterraum $U \subset \mathbb{F}^n$ an sich nennen wir von nun an genau dann TRANSVERSAL, wenn er in $\hat{G}_k^n\mathbb{F}$ liegt. Um einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{F}^n$ auf diese Eigenschaft zu untersuchen, genügt jedoch die Betrachtung des Schnittes mit jenen Seiten des Koordinatensimplex, deren Co-Dimension der Dimension von U gleicht. Konkretisiert:

Lemma 2.3.2. *(Transversalitäts-Kriterium) Es sei $U \in G_k^n\mathbb{F}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $U \in \hat{G}_k^n\mathbb{F}$

(ii) $U \blacktriangledown \Delta$ *für alle* $\Delta \in KS_k^n\mathbb{F}$

Beweis. Die Richtung $(i) \Longrightarrow (ii)$ ergibt sich direkt aus $KS_k^n\mathbb{F} \subset KS_*^n\mathbb{F}$.
Um die umgekehrte Richtung $(ii) \Longrightarrow (i)$ zu beweisen, betrachten wir ein beliebiges $I \in 2^{[n]}$ und damit $\Delta = \Delta_I^n \in KS_*^n\mathbb{F}$ beliebig. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:
Erster Fall: Es gilt $\#I \geq k$: In diesem Fall existiert eine Teilmenge $P \in \binom{I}{k}$. Wegen $P \subset I$ gilt $\Delta_I^n \subset \Delta_P^n$.

Daraus ergibt sich: $(0) \subset (U \cap \Delta_I^n) \subset (U \cap \Delta_P^n) = (0)$. Somit liegt U transversal zu Δ_I^n.

Zweiter Fall: Ist $\#I < k$, so ergänzen wir I mit einer beliebigen Teilmenge $Q \in \binom{\overline{I}}{k-\#I}$ zu einer k-elementigen Teilmenge $P \in \binom{[n]}{k}$. Wegen der Voraussetzung (ii) gilt $U \cap \Delta_P^n = (0)$. Nehmen wir nun an, U liegt nicht transversal zu Δ_I^n, d.h. $\dim(U \cap \Delta_i^n) > (k - \#I)$, so erhalten wir folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(U \cap \Delta_P^n) = \dim\big(U \cap (\Delta_{I \cup Q}^n)\big) = \dim\big(U \cap (\Delta_I^n \cap \Delta_Q^n)\big) \\ &= \dim\big((U \cap \Delta_I^n) \cap \Delta_Q^n\big) \geq \dim(U \cap \Delta_I^n) + \dim(\Delta_Q^n) - n = \dim(U \cap \Delta_I^n) + \#I - k \\ &> (k - \#I) + \#I - k = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt auch in diesem Fall $\dim(U \cap \Delta_I^n) = \dim(U) + \dim(\Delta_I^n) - n$. □

Bemerkung 2.3.3. *Der zu einem transversalen Unterraum $U \in \hat{G}_k^n\mathbb{F}$ bezüglich des komponentenweisen Produktes $< x|y >:= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ (bzw. ebenso der in $\mathbb{C}$ bzgl. des Standardskalarproduktes) orthogonale Unterraum $U^\perp$ ist ebenfalls transversal, da $(\Delta_I^n)^\perp = \Delta_{\overline{I}}^n$ für $I \in \binom{n}{n-k}$ und damit $U^\perp \cap \Delta_I^n = (U + \Delta_{\overline{I}}^n)^\perp = (\mathbb{F}^n)^\perp = (0)$.*

Beispiel 2.3.4. *Das generische Stratum der 1-ten Grassmannschen im $\mathbb{R}^3$ besteht aus allen Geraden durch den Nullpunkt, welche in keiner der drei Koordinatenebenen enthalten sind. Verallgemeinert gilt prinzipiell für eindimensionale Unterräume:*
$\hat{G}_1^n\mathbb{F} = \big\{\{\lambda \cdot (v_1, \cdots, v_n) | \lambda \in \mathbb{F}\} \big| v_i \neq 0 \text{ für alle } i \in [n]\big\}$. *Die transversalen Ebenen im $\mathbb{R}^3$ wiederum sind genau jene, die keine der drei Koordinatenachsen enthalten. Komplizierter wird der Begriff der Transversalität ab Dimension 4 und Co-Dimensionen sowie Dimensionen echt größer 1, da ab hier die Enthaltensrelation kein hinreichendes Kriterium mehr ist. Betrachten wir z.B. im $(\mathbb{F}_3)^4$ die Ebene aufgespannt von den Vektoren $(1, 0, 1, 1)$ und $(0, 1, 1, 1)$, so entspricht diese keiner der $\binom{4}{2} = 6$ Seiten des Koordinatensimplex mit Co-Dimension 2, ist jedoch trotzdem nicht transversal, da der Schnitt mit $\Delta_{\{3,4\}}^4$ die von $(1, 2, 0, 0)$ aufgespannte Gerade enthält.*

Kapitel 3

Definition der Grassmann Homologie

Ausgehend von den Schnitten transversaler Unterräume mit den jeweiligen Koordinatenhyperebenen können wir nun beginnen, den Grassmannschen Kettenkomplex zu definieren. Dazu sollen zunächst kurz allgemeine Begriffe geklärt werden.

3.1 $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe

Unter $(\mathcal{C}_*, \delta_*) = (\mathcal{C}_k, \delta_k)_{k\geq 0}$ verstehen wir einen $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex, wenn $\mathcal{C}_k$ eine Folge freier abelscher Gruppen und $\delta_k : \mathcal{C}_k \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}$ jeweils Gruppen-Homomorphismen sind, wobei zusätzlich stets $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$ gilt. Die jeweilige Gruppe $\mathcal{C}_k$ heißt Kettengruppe im k-ten homologischen Grad und die Abbildung δ_k k-ten Randoperator bzw. Randabbildung. Die Gesamtheit der Kettengruppen ist als einzelne graduierte abelsche Gruppe $\mathcal{C} = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{C}_k$ auffassbar und der generelle Randoperator $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ des Komplexes als der von den einzelnen δ_k induzierte Homomorphismus $\sigma_* = \sum \sigma_k \mapsto \sum \delta(\sigma_*) = \delta_k(\sigma_k)$.

Im Folgenden wollen wir ausschließlich $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe, die von festen Basen erzeugt sind, betrachten: Wir nennen eine Menge $X_* = \bigcup_{k\geq 0} X_k$ eine Basis von $\mathcal{C}_*$, wenn $\mathcal{C}_k = \mathbb{Z}X_k = \{\lambda : X_k \longrightarrow \mathbb{Z}, c \mapsto \lambda_c \big| \lambda_c = 0$ für alle bis auf endlich viele $c \in X_k\}$. Die punktweise Addition der Funktionen ist die Gruppenoperation. Die Elemente von $\mathcal{C}_k$ schreiben wir als formale $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen aus Basiselementen in der Form $\sigma = \sum_{c\in X_k} \lambda_c \cdot c$, wobei zu jedem c nur endlich viele Koeffizienten λ_c verschieden 0 sind. Die Randabbildung δ_* können wir auf dieser Basis X_* wie folgt eindeutig angeben:

$$\begin{array}{llll} \delta_k : & \mathbb{Z}X_k & \longrightarrow & \mathbb{Z}X_{k-1} \\ & c & \mapsto & \sum_{c'\in X_{i-1}} [c : c'] \cdot c', \end{array}$$

wobei $[c : c'] \in \mathbb{Z}$ gilt und $\{c' \in X_{k-1} \big| [c : c'] \neq 0\}$ endlich ist.

Es sei $(\mathcal{C}_*, \delta_*) = (\mathcal{C}_k, \delta_k)_{k\geq 0}$ ein $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex. Unter der Homologie $\mathcal{HC}_* = (\mathcal{HC}_k)_{k\geq 0}$ des Komplexes verstehen wir die graduierte Gruppe, die sich durch die Modulodivision des

Kerns der Randabbildung δ durch das - wegen $\delta \circ \delta = 0$ in ihm enthaltene - Bild der Randabbildung ergibt: $\mathcal{HC}_k = (\text{kern}(\delta_k)/\text{bild}(\delta_{k+1}))$. Zwei $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe $\mathcal{C}_*$ und $\mathcal{C}'_*$ sind genau dann isomorph (Schreibweise: $\mathcal{C}_* \cong \mathcal{C}'_*$), wenn es jeweils Gruppen-Isomorphismen $\Phi_k : \mathcal{C}_k \longrightarrow \mathcal{C}'_k$ gibt, so dass zudem $\delta_{\mathcal{C}'} \circ \Phi = \Phi \circ \delta_{\mathcal{C}}$ gilt. Eine Umbenennung der Elemente einer einen Kettenkomplex erzeugenden Basis stellt strenggenommen eine Isomorphie und keine Gleichheit der Komplexe dar. Jedoch wollen wir im weiteren Verlauf des öfteren von 'Identifikation' der Basiselemente sprechen, ohne einen Komplex an sich umzubenennen. Sind zwei Komplexe $\mathcal{C}_*$ und $\mathcal{C}'_*$ homotopieäquivalent (Schreibweise: $\mathcal{C}_* \simeq \mathcal{C}'_*$), so folgt insbesondere, dass $\mathcal{HC}_* \cong \mathcal{HC}'_*$. Eine genauere Definition der Homotopie zwischen Kettenkomplexen ist für unsere weiteren Betrachtungen im Rahmen der Grassmann Homologie nicht notwendig. Sind $(\mathcal{U}_k \subset \mathcal{C}_k)_{k\geq 0}$ jeweils Untergruppen, so dass $\delta_k(u) \in \mathcal{U}_{k-1}$ für beliebiges $u \in \mathcal{U}_k$, so heißt $\mathcal{U}_*$ Unterkomplex von $\mathcal{C}_*$. Unter $(\mathcal{C}_k/\mathcal{U}_k)_{k\geq 0}$ versteht man einen Quotientenkomplex von $\mathcal{C}_*$ nach $\mathcal{U}_k$, sofern sämtliche Quotientengruppen $(\mathcal{C}_k/\mathcal{U}_k)$ wiederum frei sind.

Lemma 3.1.1. *(Komplex-Kriterium) Ist $X_* = \bigcup_{k\geq 0} X_k$ eine indizierte Menge, $l \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, $\tau_i^k : X_k \longrightarrow X_{k-1}$ für $k > 0$, $i \in [k+l]$ eine Folge von jeweils mehreren Abbildungen, so dass stets $\tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k = \tau_i^{k-1} \circ \tau_{j+1}^k$ für $i \leq j$ erfüllt ist, dann ist $\mathcal{C}_*$ definiert durch*

$$\mathcal{C}_k := \mathbb{Z}X_k$$

und dem auf der Basis X_* definierten Randoperator

$$\delta_k(c) := \sum_{i=1}^{k+l} (-1)^{i-1} \cdot \tau_i^k(c)$$

ein $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

Beweis. Aufgrund der Definition von δ_* sind die einzelnen Randabbildungen δ_k bereits Gruppenhomomorphismen. Es bleibt die Eigenschaft $\delta_* \circ \delta_* = 0$ nachzuweisen. Dazu genügt es, den Randoperator für ein beliebiges Basiselement $c \in X_k$ anzuschauen:

$$\begin{aligned}
\delta_{k-1} \circ \delta_k(c) &= \delta_{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k+l}(-1)^{i-1} \cdot \tau_i^k(c)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k+l-1}\left((-1)^{j-1} \cdot \tau_j^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k+l}(-1)^{i-1} \cdot \tau_i^k(c)\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k+l-1}\sum_{i=1}^{k+l}(-1)^{j-1} \cdot (-1)^{i-1} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(c) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq k+l}(-1)^{j+i} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(b) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k+l-1}(-1)^{j+i} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(c) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq k+l}(-1)^{j+i} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(b) + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k+l-1}(-1)^{j+i} \cdot \tau_i^{k-1} \circ \tau_{j+1}^k(c) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq k+l}(-1)^{j+i} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(b) - \sum_{1 \leq i \leq \hat{j}-1 \leq k+l-1}(-1)^{\hat{j}+i} \cdot \tau_i^{k-1} \circ \tau_{\hat{j}}^k(c) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq k+l}(-1)^{j+i} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(b) - \sum_{1 \leq j < i \leq k+l}(-1)^{i+j} \cdot \tau_j^{k-1} \circ \tau_i^k(c) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

3.2 Der G-Kettenkomplex

Nun können wir beginnen, den zentralen Gegenstand dieser Arbeit - den wir G-Kettenkomplex nennen wollen - konkret zu beschreiben. Wir definieren zunächst zu einem festem Körper $\mathbb{F}$, einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sowie $i \in [n]$:

$$\begin{aligned}
\pi_i^n : \ \mathbb{F}^n &\longrightarrow \mathbb{F}^{n-1} \\
(x_1, \cdots, x_n) &\mapsto (x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

Diese Abbildung entfernt jedem Vektor des $\mathbb{F}^n$ kanonisch die i-te Koordinate. Die jeweilige Einschränkung von π_i^n auf die Koordinatenhyperebene Δ_i^n ist ein Isomorphismus zu dem Vektorraum $\mathbb{F}^{n-1}$. Betrachten wir das Bild des Schnittes eines $0 < k$-dimensionalen transversalen Unterraums $U \in \hat{G}_k^n\mathbb{F}$ mit Δ_i^n unter π_i^n ($i \in [n]$ beliebig), so erhalten wir aufgrund der Linearität der Abbildung zunächst einen linearen Unterraum des $\mathbb{F}^{n-1}$. Jedoch ergibt sich sogar ein $(k-1)$-dimensionaler, transversaler Unterraum:

Lemma 3.2.1. *Für den Schnitt eines transversalen Unterraumes $U \in \hat{G}_k^n\mathbb{F}$ mit Δ_i^n unter π_i^n und $k > 0$ gilt $\pi_i^n(U \cap \Delta_i^n) \in \hat{G}_{(k-1)}^{(n-1)}\mathbb{F}$.*

Beweis. Zur Dimension des Bildes: Da U per Voraussetzung transversal ist, gilt

$$\begin{aligned}\dim\Big(\pi_i^n\,(U\cap\Delta_i^n)\Big) &= \dim(U\cap\Delta_i^n)\\ &= max\,\{\dim(U)+\dim(\Delta_i^n)-n,0\}\\ &= max\,\{k+(n-1)-n,0\}\\ &= max\,\{k-1,0\}\\ &= k-1.\end{aligned}$$

Ist nun $\Delta_J^{n-1}\in KS_{(k-1)}^{(n-1)}\mathbb{F}$ eine beliebige Seite des Koordinatensimplex im $\mathbb{F}^{n-1}$ von Co-Dimension $(k-1)$, so ist $\Delta_J^{n-1}=\pi\,(\Delta_I^n\ \cap\Delta_i^n)=\pi(\Delta_I^n)$, wobei $I\in\binom{[n]}{k}$ mit $i\in I$ eindeutig existiert. Folglich gilt

$$\begin{aligned}\dim\Big(\pi\,(U\cap\Delta_i^n)\cap\Delta_J^n\Big) &= \dim\left(\pi\,(U\cap\Delta_i^n)\cap\pi(\Delta_I^n)\right)\\ &= \dim\left((U\cap\Delta_i^n)\cap(\Delta_I^n\cap\Delta_i^n)\right)\\ &= \dim\left(U\cap\Delta_I^n\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Nun können wir die Schnittabbildungen definieren.

Definition 3.2.2. *(Die Schnittabbildungen) Zu gegebenem Körper $\mathbb{F}$, $n\geq 1$, $k\in[n]$ und $i\in[n]$, sei*

$$\begin{array}{rccl} A_i^{n,k}: & \hat{G}_k^n\mathbb{F} & \longrightarrow & \hat{G}_{k-1}^{n-1}\mathbb{F}\\ & U & \mapsto & \pi_i^n\,(U\cap\Delta_i^n)\end{array}$$

die entsprechende i-te SCHNITTABBILDUNG.

Lemma 3.2.3. *Die Schnittabbildungen erfüllen die Bedingungen des Komplexkriteriums* (3.1.1)*, da für $1\leq i\leq j\leq k+p-1$ stets gilt:*

$$A_j^{n-1,k-1}\circ A_i^{n,k}(U)=A_i^{n-1,k-1}\circ A_{j+1}^{n,k}(U).$$

Beweis. Auf der Ebene der Elemente des $\mathbb{F}^n$ betrachtet erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi_j^{n-1}\circ\pi_i^n\big((x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{j+1},\cdots x_n)\big) &= \pi_j^{n-1}\big((x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_{j+1},\cdots x_n)\big)\\ &= (x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_{j+1},\cdots x_n)\\ &= \pi_i^{n-1}\big((x_1,\cdots,x_i,\cdots,\hat{x}_{j+1},\cdots x_n)\big)\\ &= \pi_i^{n-1}\circ\pi_{j+1}^n\big((x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{j+1},\cdots x_n)\big).\end{aligned}$$

Demgemäß gilt für die entsprechenden Schnittabbildungen

$$\begin{aligned}
A_j^{n-1,k-1} \circ A_i^{n,k}(U) &= A_j^{n-1,k-1}\Big(\pi_i^n(U \cap \Delta_i^n)\Big) \\
&= \pi_j^{n-1}\Big(\pi_i^n(U \cap \Delta_i^n) \cap \Delta_j^{n-1}\Big) \\
&= \pi_j^{n-1} \circ \pi_i^n\Big(U \cap \Delta_i^n \cap \Delta_{j+1}^n\Big) \\
&= \pi_i^{n-1} \circ \pi_{j+1}^n\Big(U \cap \Delta_i^n \cap \Delta_{j+1}^n\Big) \\
&= \pi_i^{n-1}\Big(\pi_{j+1}^n(U \cap \Delta_{j+1}^n) \cap \Delta_i^{n-1}\Big) \\
&= A_i^{n-1,k-1} \circ A_{j+1}^{n,k}(U).
\end{aligned}$$

□

Nun können wir die zentralen Kettenkomplexe unserer Betrachtungen definieren:

Definition 3.2.4. *(Der G-Kettenkomplex) Den Kettenkomplex* ${}^{L}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}$ *der Form*

$$\cdots \xrightarrow{\delta_3} {}^{L}\mathcal{CG}_2^p\mathbb{F} \xrightarrow{\delta_2} {}^{L}\mathcal{CG}_1^p\mathbb{F} \xrightarrow{\delta_1} {}^{L}\mathcal{CG}_0^p\mathbb{F} \rightarrow 0$$

definiert durch

$${}^{L}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} := \mathbb{Z}(\hat{G}_k^p\mathbb{F})$$

verbunden mit dem Randoperator

$$\delta_k : U \mapsto \sum_{i=1}^{k+p} (-1)^{i-1} \cdot A_i^{k+p,k}(U)$$

nennen wir den Grassmannschen Kettenkomplex *bzw.* G-Kettenkomplex *zu dem Körper* $\mathbb{F}$ *und der Co-Dimension* p.

Definition 3.2.5. *(Die lineare Grassmann Homologie) Zu den Parametern Körper* $\mathbb{F}$ *und Co-Dimension* p *verstehen wir unter der* linearen Grassmann Homologie ${}^{L}\mathcal{GH}_*^p\mathbb{F}$ *die Homologie des entsprechenden G-Kettenkomplexes* ${}^{L}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}$*, d.h.* ${}^{L}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F} = \mathcal{H}_k({}^{L}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F})$.

Diese Definition der Grassmann Homologie entspricht im Wesentlichen[1] der in [Ge] erklärten projektiven Grassmann Homologie ${}^{P}\mathcal{GH}_*^p\mathbb{F}$ (vgl. dazu Kapitel 7).

[1] Wirkliche Unterschiede bestehen neben der formalen Notation und vorausgehenden Definition lediglich in einer Verschiebung um einen homologischen Grad und das untere Komplexende im 1-ten bzw. 0-ten homologischen Grad.

Kapitel 4

Spezielle Matrizen

Die Erzeugenden des G-Kettenkomplexes - die transversalen Unterräume - werden in diesem Kapitel mit speziellen Matrizen identifiziert. Dazu sind zunächst wiederum einige Übereinkommen in Notationen nötig:

4.1 Matrizen-Schreibweisen

Es sei $(b_{i,j})_{\substack{i\in[n],\\ j\in[k]}} = B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ eine $(n \times k)$-Matrix über dem Körper $\mathbb{F}$, wobei $n, k \geq 0$. Mit

$$b_{\star j} := \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

sei der j-te Spaltenvektor von B und mit

$$\operatorname{span}(B) := \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} b_{\star j}\right) \subset \mathbb{F}^n$$

der kleinste Unterraum des $\mathbb{F}^n$, der sämtliche Spaltenvektoren von B enthält, bezeichnet. Für aufsteigend angeordnete Teilmengen $I = \{i_1, \dots i_r\}_< \in \binom{[n]}{r}$ und $J = \{j_1, \dots j_s\}_< \in \binom{[k]}{s}$ bezeichnen wir mit

$$B_{I,J} := (b_{i_t, j_u})_{\substack{1\leq t\leq r,\\ 1\leq u\leq s}}$$

jene $(r \times s)$-Untermatrix von B, die aus den Zeilen der in I und den Spalten der in J enthaltenen Elemente besteht. Ferner notieren wir mit e_i den i-ten Einheitsvektor, für eine Teilmenge $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ mit E_I^n die Matrix $\begin{pmatrix} e_{i_1} & \cdots & e_{i_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times k}$, welche aus den entsprechenden Einheitsvektoren gebildet wird, mit $E_k = E_{[k]}^k$ die k-te Einheitsmatrix und mit $GL_k\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^{k\times k}$ die k-te Generelle Lineare Gruppe über $\mathbb{F}$. Unter $\operatorname{rang}(B)$ verstehen wir die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren der Matrix B.

Beispiel 4.1.1. *(Schreibweisen-Beispiel)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}_{\{1,3\},\{1,4\}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix},$$

$$E^5_{\{1,3,4\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.1.2. *Es gilt* $\dim(\operatorname{span}(B)) = \operatorname{rang}(B)$*. Für* $B \in \mathbb{F}^{n\times k}, C \in \mathbb{F}^{n\times l}$ *ergibt sich für die zusammengesetze* $(n \times (k+l))$*-Blockmatrix* $(B|C)$*:* $\dim(\operatorname{span}(B,C)) = \dim(\operatorname{span}(B)) + \dim(\operatorname{span}(C)) - \dim(\operatorname{span}(B) \cap \operatorname{span}(C))$*. Sind* $B \in \mathbb{F}^{n\times k}, I \in 2^{[n]}$ *und* $C \in \mathbb{F}^{k\times k}$*, so gilt für das Produkt* $(B \cdot C)_{I,[k]} = B_{I,[k]} \cdot C$*.*

Lemma 4.1.3. *Zu beliebigem Körper* $\mathbb{F}$ *und einer Blockmatrix der Gestalt* $F = \left(E_P^{n-k} \middle| B\right) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *mit* $P \in \binom{[n]}{n-k}$*,* $I := \overline{P}$ *gilt*

$$\det(F) = \pm \det\left(F_{I,\overline{[n-k]}}\right) = \pm \det\left(B_{I,[k]}\right).$$

Beweis. Wir wenden den Laplace'schen Entwicklungssatz für Determinanten an und entwickeln induktiv nach den ersten $(n-k)$-Spalten. □

Lemma 4.1.4. *(Spann-Invarianz) Es sei* $k \leq n$ *und* B*,* $C \in \mathbb{F}^{n\times k}$ *mit* $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(C) = k$*. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(C)$

(ii) Es existiert ein eindeutiges $A \in GL_k\mathbb{F}$*, so dass* $B = C \cdot A$*.*

Beweis. Aus (i) folgt insbesondere $\operatorname{span}(B) \subset \operatorname{span}(C)$. Jeder Spaltenvektor $b_{\star j}$ von B ist deshalb als Linearkombination von Spaltenvektoren aus C darstellbar: $b_{\star j} = \sum_{u=1}^k a_{u,j} \cdot c_{\star u}$, wobei $a_{u,j} \in \mathbb{F}$ geeignet. Wir definieren nun die Matrix $A := (a_{u,j})_{\substack{1\leq u\leq k,\\ 1\leq j\leq k}}$. Da $b_{i,j} = \sum_{u=1}^k a_{u,j} \cdot c_{i,u} = \sum_{u=1}^k c_{i,u} \cdot a_{u,j}$, gilt $B = C \cdot A$. Ganz analog folgt aus $\operatorname{span}(C) \subset \operatorname{span}(B)$, dass $C = B \cdot A'$ mit $A' \in \mathbb{F}^{k\times k}$ geeignet. Somit erhalten wir: $B = C \cdot A = B \cdot A' \cdot A$. Da B vollen Rang hat, existiert ein $I \in \binom{[n]}{k}$, so dass $B_{I,[k]}$ invertierbar ist. Insbesondere ist also $B_{I,[k]} = B_{I,[k]} \cdot A' \cdot A$ und damit $E_k = {B_{I,[k]}}^{-1} \cdot B_{I,[k]} = A' \cdot A$ und somit gilt $A' = A^{-1}$. Zur Eindeutigkeit von A: Da $B_{I,[k]} = C_{I,[k]} \cdot A$ ist, gilt $A = C_{I,[k]}^{-1} \cdot B_{I,[k]}$.
Gilt (ii), so folgt für alle $j \in [k]$ und $i \in [n]$:$b_{i,j} = \sum_{u=1}^k c_{i,u} \cdot a_{u,j}$ und damit $b_{\star j} = \sum_{u=1}^k a_{u,j} \cdot c_{\star u}$, folglich also $b_{\star j} \in \operatorname{span}(C)$ und somit $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(\bigcup_{j=1}^k b_{\star j}) \subset \operatorname{span}(C)$. Aus $C = B \cdot A^{-1}$ resultiert $\operatorname{span}(C) \subset \operatorname{span}(B)$. □

4.2 Generische und supergenerische Matrizen

Nun werden wir konkret zwei Klassen spezieller Matrizen einführen, die in unmittelbarem Zusammenhang zu transversalen Unterräumen stehen:

Definition 4.2.1. *(Generische und supergenerische Matrizen)*

- *(Generische Matrizen) Eine Matrix $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ - wobei $k \leq n$ - heiße genau dann* GENERISCH, *wenn kein Hauptminor von B verschwindet, d.h. für jede k-elementige Teilmenge $I \in \binom{[n]}{k}$ ist $\det B_{I,[k]} \neq 0$.*
- *(Supergenerische Matrizen) Eine Matrix $D \in \mathbb{F}^{p\times k}$ heiße dann und nur dann* SUPERGENERISCH, *wenn überhaupt kein r-Minor von D verschwindet, ergo für jedes $1 \leq r \leq min\{p,k\}$, $I \in \binom{[p]}{r}$, $J \in \binom{[k]}{r}$ gilt: $\det D_{I,J} \neq 0$.*

Die eintragslosen $(0\times k)$- bzw. $(p\times 0)$-Matrizen sind gemäß dieser Definition supergenerisch. Aus formalen Gründen wollen wir diese unterscheiden und mit $(\phi)_{0\times k}$ bzw. $(\phi)_{p\times 0}$ bezeichnen.

Es sei für $0 \leq k \leq n$ mit

$$\mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F} := \{B \in \mathbb{F}^{n\times k} \big| B \text{ generisch}\}$$

der RAUM DER GENERISCHEN MATRIZEN im $\mathbb{F}^{n\times k}$ und für $0 \leq k, 0 \leq p$ mit

$$\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F} := \{D \in \mathbb{F}^{p\times k} \big| D \text{ supergenerisch}\}$$

der RAUM DER SUPERGENERISCHEN MATRIZEN im $\mathbb{F}^{p\times k}$ bezeichnet.

Bemerkung 4.2.2. *(1) Jede supergenerische $(p\times k)$-Matrix ist generisch, sofern $p \geq k$ gilt.*

(2) Eine generische Matrix hat stets vollen Rang.[1]

(3) Ist $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ generisch und $A \in GL_k\mathbb{F}$, so ist auch das Produkt $B\cdot A$ generisch.

Beispiel 4.2.3. *Wir betrachten Beispiele mit reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Einträgen: Die Matrix* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *ist supergenerisch,* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *sowie* $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *sind generisch, jedoch nicht supergenerisch,* $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ *sind vollen Ranges, jedoch nicht generisch.*

[1]Matrizen vollen Ranges enthalten lediglich mindestens einen Hauptminor verschieden Null.

4.3 Supergenerische Matrizen und transversale Unterräume

Nun können wir Zusammenhänge zwischen supergenerischen und generischen Matrizen sowie transversalen Unterräumen herstellen.

Satz 4.3.1. *Es sei $n \geq k$, $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert eine eindeutige Matrix $A \in GL_k\mathbb{F}$, so dass $B \cdot A = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$, wobei $D \in \mathbb{F}^{(n-k)\times k}$ supergenerisch ist.

(ii) Die Matrix B ist generisch.

(iii) Es gilt $\operatorname{span}(B) \in \hat{G}^n_k\mathbb{F}$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Äquivalenz von *(ii)* und *(iii)*: Aus beiden Aussagen folgt, dass $\operatorname{rang}(B) = k$. Sei nun $I \in \binom{[n]}{k}$ beliebig. Wir zeigen, dass $\det(B_{I,[k]}) \neq 0 \iff \Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B) = (0)$ gilt, was aufgrund von (4.2.1) und (2.3.2) äquivalent zu der zu beweisenden Aussage ist. Betrachten wir dazu das Komplement $P := \overline{I}$ von I in $[n]$ und die aus den zugehörigen Einheitsvektoren bestehende Matrix E^n_P, so ist $\operatorname{span}(E^n_P) = \Delta^n_I$. Daher gilt für die zusammengesetzte $(n \times n)$-Matrix $C := \left(E^n_P | B\right)$, dass

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(C) &= \dim(\operatorname{span}(C)) \\
&= \dim(\operatorname{span}(E^n_P)) + \dim(\operatorname{span}(B)) - \dim(\operatorname{span}(E^n_P) \cap \operatorname{span}(B)) \\
&= \dim(\Delta^n_I) + \dim(\operatorname{span}(B)) - \dim(\Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B)) \\
&= (n-k) + k - \dim(\Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B)) \\
&= n - \dim(\Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B)).
\end{aligned}$$

Wegen (4.1.3) gilt $\det(C) = \pm \det B_{I,[k]}$ und infolgedessen

$$\begin{aligned}
\det\left(B_{I,[k]}\right) \neq 0 &\iff \det C \neq 0 \\
&\iff \operatorname{rang}(C) = n \\
&\iff \dim\left(\Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B)\right) = 0 \\
&\iff \Delta^n_I \cap \operatorname{span}(B) = (0).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*: Ist B generisch, so ist $B_{[k],[k]}$ eindeutig mit $A := B^{-1}_{[k],[k]}$ invertierbar. Es bleibt nachzuweisen, dass in dem Produkt $F := B \cdot A = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$ die Untermatrix D supergenerisch ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen r-Minor $\det(D_{I,J})$, wobei $I \in \binom{[n-k]}{r}$, $J \in \binom{k}{r}$. Mit $I + k = \{i + k \big| i \in I\} \subset \overline{[k]}$ notieren wir die um k translatierte Teilmenge von I, so dass $F_{I+k,J} = D_{I,J}$. Wir betrachten die von I und J definierte Teilmenge $\phi(I, J) := ([k]\backslash J)\dot\cup(I + k) \subset [n]$, welche genau die Zeilen $D_{I,[k]}$ und die zu den Spalten komplementären Zeilen $(E_k)_{[k]\backslash J,[k]}$ der Einheitsmatrix enthält. Da $\#(\phi(I, J)) = \#([k]\backslash J) + \#(I + k) = (k - r) + r = k$ gilt und zudem per Voraussetzung B und somit auch F generisch sind, ist $C := F_{\phi(I,J),[k]} \in GL_k\mathbb{F}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det C \\ &= \pm \det C_{[k]\backslash[r],[k]\backslash([k]\backslash J)} \\ &= \pm \det C_{[k]\backslash[r],J} \\ &= \pm \det D_{I,J}. \end{aligned}$$

Also ist D supergenerisch.
Die Rückrichtung $(i) \Longrightarrow (ii)$ können wir analog zu der entgegengesetzten Richtung beweisen: Es sei $F := B \cdot A = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$ mit dem per Voraussetzung existierenden $A \in GL_k\mathbb{F}$.
Betrachten wir einen beliebigen k-Minor $F_{I,[k]}$, wobei $I \in \binom{[n]}{k}$, so ist entweder $I = [k]$ und damit $\det F_{I,[k]} = 1 \neq 0$ oder wir erhalten mittels $\psi_1(I) := (\overline{[k]}\cap I)-k$, $\psi_2(I) := [k]\backslash I$ einen entsprechenden r-Minor $D_{\psi_1(I),\psi_2(I)}$ von D, wobei $r := \#([k]\backslash I)$, da $1 \leq r \leq \min(k, n - k)$ und $\#((\overline{[k]} \cap I) - k) = \#(I\backslash[k]) = \#(I\backslash(I \cap [k])) = \#(I\backslash([k]\backslash([k]\backslash I))) = k - (k - r) = r$ gilt. Deshalb ergibt sich nach (4.1.3) durch Entwicklung nach den ersten r Zeilen für die Determinante von $F_{I,[k]}$:

$$\begin{aligned} \det(F_{I,[k]}) &= \pm \det \left((F_{I,[k]})_{[k]\backslash[r],\psi_2(I)}\right) \\ &= \pm \det \left(F_{\overline{[k]}\cap I,\psi_2(i)}\right) \\ &= \pm \det \left(B_{\psi_1(I),\psi_2(I)}\right) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Also ist $\begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$ generisch und damit auch $B = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$. $\square$

Beispiel 4.3.2. *In einer* (7×4)*-Matrix der Gestalt* $F = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$ *entspricht der* 4*-Minor* $F_{\{1,3,5,6\},[4]}$ *quasi dem* 2*-Minor* $D_{\{1,2\},\{2,4\}}$*:*

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{d_{1,1}} & \boldsymbol{d_{1,2}} & \boldsymbol{d_{1,3}} & \boldsymbol{d_{1,4}} \\ \boldsymbol{d_{2,1}} & \boldsymbol{d_{2,2}} & \boldsymbol{d_{2,3}} & \boldsymbol{d_{2,4}} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} \end{pmatrix}_{\{1,3,5,6\},[4]} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_{1,1} & \boldsymbol{d_{1,2}} & d_{1,3} & \boldsymbol{d_{1,4}} \\ d_{2,1} & \boldsymbol{d_{2,2}} & d_{2,3} & \boldsymbol{d_{2,4}} \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} d_{1,2} & d_{1,4} \\ d_{2,2} & d_{2,4} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 4.3.3. *Ebenfalls gleichbedeutend mit den Aussagen aus* (4.3.1) *ist:*

(iv) *Jede Ergänzung von* B *mit beliebigen* $(n-k)$ *paarweise verschiedenen (Spalten-) Einheitsvektoren zu einer* $(n \times n)$*-Matrix ist invertierbar.*

(v) *Die Matrix* $(B \cdot A)$ *ist generisch für ein bzw. alle* $A \in GL_k\mathbb{F}$*.*

(vi) *Zu einer geeigneten bzw. beliebigen Teilmenge* $I \in \binom{[n]}{k}$ *existiert ein eindeutiges* $A_I \in GL_k\mathbb{F}$*, so dass* $(B \cdot A_I)_{I,[k]} = E_k$ *wie auch* $(B \cdot A_I)_{\overline{I},[k]}$ *supergenerisch ist.*

Folgerung 4.3.4. *(Identifikationsabbildungen) Wir erhalten als Identifikationen*

$$\mathsf{SGen}_k^{n-k}\mathbb{F} \overset{\Theta}{\cong} \mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}/GL_k\mathbb{F} \overset{\varsigma}{\cong} \hat{G}_k^n\mathbb{F}$$

Beweis. Wir verwenden folgende von $\mathbb{F}$, n und k abhängigen Abbildungen:

$$\begin{array}{rccl} \Theta: & \mathsf{SGen}_k^{n-k}\mathbb{F} & \longrightarrow & \mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}/GL_k\mathbb{F} \\ & D & \mapsto & \overline{\begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix} \cdot GL_k\mathbb{F} \end{array} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{rccl} \varsigma: & \mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}/GL_k\mathbb{F} & \longrightarrow & \hat{G}_k^n\mathbb{F} \\ & \overline{B} & \mapsto & \operatorname{span}(B). \end{array}$$

Als Umkehrungen ergeben sich

$$\Theta^{-1}(\overline{B}) = \Big(B \cdot \big(B_{[k],[k]}\big)^{-1}\Big)_{\overline{[k]},[k]}, \text{sowie}$$

$$\varsigma^{-1}\Big(\operatorname{span}(B)\Big) = \overline{B}.$$

Es sind Θ, Θ^{-1} wegen (4.3.1),(4.2.2) wie auch ς, ς^{-1} wegen (4.3.1) und (4.1.4) wohldefiniert. Zu ς^{-1} sei kurz angemerkt, dass jeder k-dimensionale Unterraum des $\mathbb{F}^n$ eine Basis in der Gestalt $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ und damit jeder aus dem generischen Stratum wegen (4.3.1) der Form $B \in \mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}$ hat. Für Θ^{-1} sei zusätzlich notiert, dass für beliebiges $A \in GL_k\mathbb{F}$ gilt:

$$\begin{aligned}(B\cdot A)\cdot\left(\left((B\cdot A)_{[k],[k]}\right)^{-1}\right) &= (B\cdot A)\cdot\left(B_{[k],[k]}\cdot A\right)^{-1}\\ &= B\cdot A\cdot A^{-1}\cdot\left(B_{[k],[k]}\right)^{-1}\\ &= B\cdot\left(B_{[k],[k]}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Es ist $\Theta^{-1}\circ\Theta(D) = \Theta^{-1}\left(\overline{\begin{pmatrix}E_k\\ \cdots\\ D\end{pmatrix}}\right) = D$ für jedes supergenerische D, $\Theta\circ\Theta^{-1}(\overline{B}) = \Theta\circ\Theta^{-1}\left(\overline{\begin{pmatrix}E_k\\ \cdots\\ D\end{pmatrix}}\right) = \Theta\left(\begin{pmatrix}E_k\\ \cdots\\ D\end{pmatrix}_{\overline{[k],[k]}}\right) = D$ für ein generisches B mit dem entsprechenden D aus (4.3.1). Für ς und ς^{-1} folgt die Identitätseigenschaft der Kompositionen unmittelbar aus der Definition.

□

Wir definieren $\xi = \xi_{\mathbb{F},p,k} := \varsigma\circ\Theta$ als Identifikation zwischen den Elementen des Raums der supergenerischen Matrizen $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ mit jenen des generischen Stratums der Grassmannschen $\hat{G}_k^{k+p}\mathbb{F}$.

4.4 Eigenschaften generischer und supergenerischer Matrizen

Betrachten wir nun diverse Eigenschaften generischer und supergenerischer Matrizen beziehungsweise des generischen Stratums der Grassmannschen:

Bemerkung 4.4.1.

- *Kein Eintrag einer supergenerischen Matrix ist gleich Null, da die Einträge genau die* 1*-Minoren sind und diese nicht verschwinden.*
- *Ist $p, k \geq 2$, so gleichen sich wegen des Nicht-Verschwindens sämtlicher* 2*-Minoren niemals zwei Zeilen oder Spalten einer supergenerischen Matrix.*
- *Jede Submatrix einer supergenerischen Matrix ist selbst supergenerisch.*[2]
- *Die Transponierte einer supergenerischen Matrix ist supergenerisch, insbesondere gilt deshalb $\#(\mathit{SGen}_k^p\mathbb{F}_q) = \#(\mathit{SGen}_p^k\mathbb{F}_q)$.*

[2]Bei generischen Matrizen sind nur Teilmatrizen voller Breite und mit mindestens so vielen Zeilen wie Spalten zwingend generisch.

Jeder Hauptminor der Transponierten einer generischen Matrix ist verschieden Null, jedoch ist bei der Transponierten einer nicht-quadratischen Matrix die Bedingung verletzt, dass eine generische Matrix mindestens so viele Zeilen wie Spalten enthält.[3]

- *Werden Zeilen bzw. Spalten bei einer (super-) generischen Matrix vertauscht oder mit einem Körperelement verschieden Null multipliziert, so ist das Ergebnis wiederum (super-) generisch. Addieren wir das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ist das Resultat nicht zwingend (super-)generisch. Unter elementaren Spaltenoperationen dieser Art sind nur die generischen Matrizen stabil.*

- *Die quadratischen supergenerischen Matrizen bilden im Gegensatz zu dem Raum der generischen Matrizen ($\mathsf{Gen}_n^n\mathbb{F} = GL_n\mathbb{F}$) keine Gruppe*[4]*, da die jeweilige Einheitsmatrix E_n Nulleinträge enthält. Jedoch gilt stets, dass auch die Inverse einer quadratischen, supergenerischen Matrix D supergenerisch ist.*

  Da $\begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$ *und folglich auch die zeilenpermutierte Matrix* $\begin{pmatrix} D \\ \cdots \\ E_k \end{pmatrix}$ *und damit das Produkt*
  $\begin{pmatrix} D \\ \cdots \\ E_k \end{pmatrix} \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} D \cdot D^{-1} \\ \cdots \\ E_k \cdot D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D^{-1} \end{pmatrix}$ *generisch sind, ist auch D^{-1} supergenerisch.*

- *Die generischen $(n \times k)$-Matrizen entsprechen den geordneten Basen der k-dimensionalen, transversalen Unterräume des $\mathbb{F}^n$, während jede supergenerische $(p \times k)$-Matrix über die Identifikation mittels ξ genau einen transversalen Raum repräsentiert.*

  Konkret liegt bei jener speziellen durch eine supergenerische Matrix dargestellten Basis für jedes $j \in [k]$ genau ein Basisvektor in dem 'um einen kanonischen Einheitsvektor verschobenen' affinen Unterraum $\Delta_{[k]}^n + e_j$.

- *Über endlichen Körpern $\mathbb{F}_q$ gilt:*

$$\begin{aligned} \#\mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}_q &= \#\mathsf{SGen}_k^{n-k}\mathbb{F}_q \cdot \#GL_k(\mathbb{F}_q) \\ &= \#\mathsf{SGen}_k^{n-k}\mathbb{F}_q \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(q^k - q^j). \end{aligned}$$

Eine grundlegende Schwierigkeit besteht in der Abzählung der Elemente von $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ und damit $\mathsf{Gen}_k^{k+p}\mathbb{F}$ über endlichen Grundkörpern $\mathbb{F}_q$.[5] *Ist $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper, so ist die Anzahl der Elemente von $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ nur bis zu einer Zeilenanzahl $p \leq 2$ (oder gleichbedeutend damit bis zur Spaltenanzahl $k \leq 2$) direkt ermittelbar.*

[3] Dieses Kriterium wurde gesetzt, damit die Spaltenvektoren einer generischen Matrix stets die Basis eines transversalen Unterraums darstellen.

[4] Abgesehen von den Fällen $n = 0$ und $n = 1$.

[5] Bei unendlichen Grundkörpern $\mathbb{F}$ ergeben sich topologische Fragestellungen.

Lemma 4.4.2. *(Anzahlen supergenerischer Matrizen) Es gilt*

$$\begin{aligned}\#(\mathsf{SGen}_k^0\mathbb{F}) &= 1\\ \#(\mathsf{SGen}_k^1\mathbb{F}_q) &= (q-1)^k\\ \#(\mathsf{SGen}_k^2\mathbb{F}_q) &= \begin{cases}(q-1)^k\cdot\frac{(q-1)!}{(q-k-1)!} & \text{falls } k<q\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. *Die jeweils einzige $(0\times k)$-Matrix ist die leere Matrix $(\phi)_{0\times k}$, diese ist supergenerisch. Sie entspricht dem $\mathbb{F}^k$ als trivialen Unterraum in sich.*[6] *Bei einzeiligen Matrizen sind lediglich die k verschiedenen 1-Minoren, welche Körperelemente des $\mathbb{F}_q$ sind, zu betrachten. Diese verschwinden genau dann, wenn sie Null sind. Folglich ist $\mathsf{SGen}_k^1\mathbb{F}=(\mathbb{F}\backslash\{0\})^{1\times k}\cong(\mathbb{F}^*)^k$. Daraus folgt direkt $\#(\mathsf{SGen}_k^1\mathbb{F}_q)=(q-1)^k$. Zu $p=2$: Zunächst ist aufgrund der gestellten Bedingung an die 1-Minoren eines Kandidaten $D\in\mathbb{F}^{2\times k}$ festzustellen, dass hierfür genau $D\in(\mathbb{F}^*)^{2\times k}$ gelten muss. Ein Nicht-Verschwinden sämtlicher Zweiminoren ist äquivalent zur paarweisen linearen Unabhängigkeit aller Spaltenvektoren. Bezeichnen wir mit $c_j:=\frac{d_{2,j}}{d_{1,j}}$ den Quotienten der Einträge eines Spaltenvektors, so ist dies genau dann der Fall, wenn $c_j\neq c_{j'}$ für $j\neq j'$. Setzen wir dies zusammen, erhalten wir für jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_q$:*

$$\#(\mathsf{SGen}_k^2\mathbb{F}_q)=(q-1)^k\cdot\prod_{j=1}^{k}(q-j)=\begin{cases}(q-1)^k\cdot\frac{(q-1)!}{(q-k-1)!} & \text{falls } k<q\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

□

Da jede Untermatrix einer supergenerischen Matrix ebenfalls supergenerisch ist, folgt aus $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q=\phi$, dass für $p'\geq p$ und $k'\geq k$ auch der Raum $\mathsf{SGen}_{k'}^{p'}\mathbb{F}_q$ leer ist. Insbesondere gilt deshalb $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q=\phi$ für $k\geq q$ und $p\geq 2$ bzw. für $p\geq q$ und $k\geq 2$. Ganz konkret ist beispielsweise bereits $\mathsf{SGen}_2^2\mathbb{F}_2=\phi$ und somit $\hat{G}_2^4\mathbb{F}_2=\phi$. Dies bedeutet, dass keine 2-dimensionalen transversalen Unterräume des $(\mathbb{F}_2)^4$ existieren.

Es wird deutlich schwieriger, gültige Aussagen zu Räumen supergenerischer Matrizen mit mindestens drei Spalten und Zeilen zu treffen. Hypothesen dazu finden sich in Kapitel 9.

[6] Die Matrix $(\phi)_{p\times 0}$ entspricht dem Unterraum $(0)\subset\mathbb{F}^p$.

Kapitel 5

Supergenerische Matrizen und der G-Komplex

5.1 Der G-Kettenkomplex in Matrizenschreibweise

Durch die Identifikation der transversalen Unterräume mit supergenerischen Matrizen können wir den G-Kettenkomplex als von supergenerischen Matrizen aufgespannt auffassen. Dazu identifizieren wir die Basiselemente von ${}^{\llcorner}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$ über die Abbildung ξ^{-1} mit den supergenerischen Matrizen in $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$.

Der Randoperator

$$\begin{array}{rlcl} \delta_k: & \mathbb{Z}\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathsf{SGen}_{k-1}^p\mathbb{F} \\ & D & \mapsto & \xi^{-1}\circ\delta_k\circ\xi(D) \end{array}$$

ist zunächst explizit zu bestimmen. Dazu betrachten wir erst die Schnittabbildungen $A_i^{k+p,k}$, $i \in [k+p]$ hinsichtlich generischer Matrizen als Basen.

Lemma 5.1.1. *Ist $B \in \mathsf{Gen}_k^n\mathbb{F}$ und $i \in [n]$, so dass für alle Elemente außerhalb einer festen Spalte $j \in [k]$ gilt: $b_{i,u} = 0$ für $u \neq j$, dann ist $A_i^{n,k}\Big(\mathrm{span}(B)\Big) = \mathrm{span}\Big(B_{\overline{\{i\}},\overline{\{j\}}}\Big)$.*

Beweis. Es gilt für $u \neq j$: $b_{\star u} \in \Delta_i^n$ und daher $\mathrm{span}\Big(B_{[n],\overline{\{j\}}}\Big) = \Big(\mathrm{span}(B) \cap \Delta_i^n\Big)$. In Folge dessen bekommen wir:

$$\begin{aligned} A_i^{n,k}\Big(\mathrm{span}(B)\Big) &= \pi_i^n\Big(\mathrm{span}(B) \cap \Delta_i^n\Big) \\ &= \pi_i^n\Big(\mathrm{span}(B_{[n],\overline{\{j\}}})\Big) \\ &= \pi_i^n\Big(\mathrm{span}\left(b_{\star 1}, \cdots, \hat{b_{\star j}}, \cdots, b_{\star k}\right)\Big) \\ &= \mathrm{span}\Big(\pi_i^n\left(b_{\star 1}\right), \cdots, \pi_i^n(b_{\star j-1}), \pi_i^n(b_{\star j+1}), \cdots, \pi_i^n(b_{\star k})\Big) \\ &= \mathrm{span}\Big(B_{\overline{\{i\}},\overline{\{j\}}}\Big). \end{aligned}$$

□

Nun zu dem Randoperator, der auf supergenerischen Matrizen angewandt wird:

Lemma 5.1.2. *Wird $D \in \mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ als Basiselement von ${}^L\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$ gelesen, so gilt für den Randoperator:*

$$\delta_k(D) = \sum_{i=1}^{k+p} (-1)^{i-1} \cdot A_i^{k+p,k}(D)$$

mit folgender Repräsentation der Schnittabbildungen: Für $i \in [k]$ wird lediglich die i-te Spalte entfernt:

$$A_i^{k+p,k}(D) = D_{[n-k],\overline{\{i\}}}, \text{ für } i \in [k].$$

Für $k < i \leq (k+p)$ ergibt sich:

$$\left(A_i^{k+p,k}(D)\right)_{l,j} = \begin{cases} -\frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} & \text{falls } l = 1 \\ d_{l-1,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot d_{l-1,k} & \text{falls } 1 < l \leq (i-k) \\ d_{l,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot d_{l,k} & \text{falls } (i-k) < l. \end{cases}$$

Beweis. Wir schreiben $B := \begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix}$. Zu beliebigem $i \in [k]$ gilt

$$\begin{aligned} A_i^{k+p,k}(D) &= \xi^{-1} \circ A_i^{k+p,k} \circ \xi(D) \\ &= \xi^{-1} \circ A_i^{k+p,k}\Big(\operatorname{span}(B)\Big) \\ &=_{(5.1.1)} \xi^{-1}\Big(\operatorname{span}\left(B_{\overline{\{i\}},\overline{\{i\}}}\right)\Big) \\ &= D_{[n-k],\overline{\{i\}}}. \end{aligned}$$

Zu $i \in \overline{[k]}$ betrachten wir zunächst die Untermatrix $C_i := B_{[k-1]\cup\{i\},[k]}$ bestehend aus den ersten $(k-1)$ Zeilen zuzüglich der i-ten Zeile und deren Inverse C_i^{-1}.
Wegen $\left(B \cdot C_i^{-1}\right)_{[k-1]\cup\{i\},[k]} = E_k$ gilt

(a) $\left(B \cdot C_i^{-1}\right)_{i,u} = 0$ für $u \neq k$ und

(b) $\left(B \cdot C_i^{-1}\right)_{[k-1],[k-1]} = E_{k-1}$.

Ergo erhalten wir für die i-te Schnittabbildung auf D angewandt:

$$\begin{aligned}
A_i^{k+p,k}(D) &= \xi^{-1} \circ A_i^{k+p,k} \circ \xi(D) \\
&= \xi^{-1} \circ A_i^{k+p,k}\Big(\operatorname{span}(B)\Big) \\
&=_{(4.1.4)} \xi^{-1} \circ A_i^{k+p,k}\Big(\operatorname{span}(B \cdot C_i^{-1})\Big) \\
&=_{(a),(5.1.1)} \xi^{-1}\Big(\operatorname{span}\Big((B \cdot C_i^{-1})_{\overline{\{i\}},[k-1]}\Big)\Big) \\
&=_{(b)} \Big((B \cdot C_i^{-1})_{\overline{\{i\}},[k-1]}\Big)_{\overline{[k-1]},[k-1]} \\
&= \left(\begin{pmatrix} C_i^{-1} \\ \cdots \\ D \cdot C_i^{-1} \end{pmatrix}_{\overline{\{i\}},[k-1]} \right)_{\overline{[k-1]},[k-1]} \\
&= \begin{pmatrix} (C_i^{-1})_{\{k\},[k-1]} \\ \cdots \\ (D \cdot C_i^{-1})_{\overline{\{i-k\}},[k-1]} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da nun C_i^{-1} von der Gestalt

$$C_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ -\frac{d_{i-k,1}}{d_{i-k,k}} & \cdots & -\frac{d_{i-k,k-1}}{d_{i-k,k}} & \frac{1}{d_{i-k,k}} \end{pmatrix}$$

ist, erhalten wir die angegebene Formel. □

Bemerkung 5.1.3. *Anzumerken ist, dass in dieser Notation die $(k+p)$ Schnittabbildungen, welche zusammen den Randoperator $D \mapsto \delta_k(D)$ in ${}^{L}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$ bilden, in zwei Klassen mit k bzw. p Elementen zerfallen. Während die k ersten Abbildungen jeweils lediglich eine Spalte der Ursprungsmatrix D entfernen, nimmt bei den anderen p Operatoren die letzte Spalte von D eine gesonderte Position ein. Zudem gibt es für $p, k \geq 2$ zeilenübergreifende Veränderungen, d.h. eine beliebige l-te Zeile in $A_i^{k+p,k}(D)$ ist für $i > k$ nicht nur bzw. sogar gar nicht von der entsprechenden l-ten Zeile in D abhängig, jedoch stets von der $(i-k)$-ten. Aus der Eigenschaft supergenerischer Matrizen, dass sich für $p, k \geq 2$ Spalten bzw. Zeilen paarweise nicht gleichen, ist ablesbar, dass in diesem Falle niemals zwei Schnittabbildungen aus einer der beiden Hälften eine identische Matrix liefern und somit - schreiben wir den Randoperator in der Form $\delta_k(D) = \sum_{D' \in SGen_{k-1}^p\mathbb{F}} \lambda_r \cdot D'$ - für den Betrag jedes Koeffizienten $|\lambda_r| \leq 2$ gilt.*

Beispiel 5.1.4. *Wir betrachten z.B. ganz abstrakt eine supergenerische 2×3-Matrix*

$$D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

und erhalten als Randoperator

$$\begin{aligned}\delta(D) &= \sum_{i=1}^{3+2}(-1)^{i-1}\cdot A_i^{3+2,3}(D)\\ &= \begin{pmatrix} b & c\\ e & f\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c\\ d & f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b\\ d & e\end{pmatrix}\\ &- \begin{pmatrix} -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c}\\ d-\frac{a}{c}\cdot f & e-\frac{b}{c}\cdot f\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{d}{f} & -\frac{e}{f}\\ a-\frac{d}{f}\cdot c & b-\frac{e}{f}\cdot c\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5.2 Direkt ermittelbare Gruppen der Grassmann Homologie

Nur sehr spezielle Homologiegruppen sind direkt aus der Kenntnis des Randoperators in Matrizenschreibweise erfassbar. Diese seien in Folge kurz aufgelistet.

- Betrachten wir zunächst den Spezialfall des Komplexes ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_*^0\mathbb{F}$ mit Co-Dimension 0 zu beliebigem Grundkörper $\mathbb{F}$:

  Da stets $\mathsf{SGen}_k^0\mathbb{F} = \{(\phi)_{0\times k}\}$ gilt - was dem $\mathbb{F}^k$ als trivialen Unterraum in sich selbst entspricht - ist für $0 \leq k$: ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_k^0\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}$. Es ist $A_i((\phi)_{0\times k}) = (\phi)_{0\times(k-1)}$ für alle i und $k > 0$, deshalb gilt für ungerade k:

  $$\delta_k\left((\phi)_{0\times k}\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\cdot(\phi)_{0\times(k-1)} = (\phi)_{0\times(k-1)}$$

  und für gerade k

  $$\delta_k\left((\phi)_{0\times k}\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\cdot(\phi)_{0\times(k-1)} = 0.$$

  Also ist ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{GH}_*^0\mathbb{F} = (0)$.

- Der nullte homologische Grad:

  Es gilt stets ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_0^p\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}$ sowie $\delta_0 = 0$. Betrachten wir das Bild von δ_1, so zeigt sich, dass die jeweiligen Schnittabbildungen jeder supergenerischen $(p\times 1)$-Matrix D immer die Matrix $(\phi)_{p\times 0}$ zuordnen. Infolgedessen ist wegen $\delta_1(D) = \sum_{i=1}^{1+p}(-1)^{i-1}\cdot(\phi)_{p\times 0}$ der Operator δ_1 nur davon abhängig, ob $(1+p)$ gerade oder ungerade ist. Für gerades p ist δ_1 surjektiv, für ungerades p die 0-Abbildung. Folglich gilt

  $${}^{\mathsf{L}}\mathcal{GH}_0^p\mathbb{F} \cong \begin{cases}(0) & \text{falls } p \equiv 0(2)\\ \mathbb{Z} & \text{falls } p \equiv 1(2).\end{cases}$$

- Betrachten wir zu endlichen Körpern $\mathbb{F}_q$ den Kettenkomplex zu einer Co-Dimension $p \geq q$:

  Für $k \geq 2$ gilt stets $\mathsf{SGen}_k^p \mathbb{F}_q = \phi$ und somit ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_k^p \mathbb{F}_q = 0$. Es ist $\mathsf{SGen}_0^p \mathbb{F}_q = \{(\phi)_{p \times 0}\}$ und $\mathsf{SGen}_1^p \mathbb{F}_q \cong (\mathbb{F}^*)^p$.

  Wegen der Eigenschaften von δ_1 erhalten wir für $p \geq q$:

$$ {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_k^p \mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{(q-1)^p - 1} & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} $$

  für gerades p und

$$ {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_k^p \mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{(q-1)^p} & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} $$

  für ungerades p.

- Ist $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper und $p \geq 2$, so enden die jeweiligen Kettenkomplexe ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_*^p \mathbb{F}_q$ spätestens im homologischen Grad $k = (q-1)$ [1], so dass genau $p = 0$ und $p = 1$ unendliche Kettenkomplexe generieren.

5.3 Eulercharakteristiken des G-Kettenkomplexes

Für die Co-Dimensionen $p = 0, 1, 2$ bzw. $p \geq q$ können wir aufgrund der Kenntnis der Anzahlen transversaler Unterräume die jeweilige Eulercharakteristik $\chi({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_*^p \mathbb{F}_q) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \operatorname{rang}({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_k^p \mathbb{F}_q)$ angeben:

- $p = 0$: Über jedem Körper $\mathbb{F}$ und für alle $k \geq 0$ ist $\operatorname{rang}({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_k^0 \mathbb{F}) = 1$, folglich der generierte Kettenkomplex unendlich lang. Schneiden wir diesen künstlich hinter dem l-ten homologischen Grad ab, so erhalten wir $\chi({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_{\leq l}^0 \mathbb{F}) = 1$ für l gerade bzw. $\chi({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_{\leq l}^0 \mathbb{F}) = 0$ für l ungerade.

- $p = 1$: Auch hier ist der Komplex stets unendlicher Länge. Für den nach dem l-ten

[1] Diese obere Schranke ist für $p \geq 3$ nicht exakt, z.B. ist $\mathsf{SGen}_4^3 \mathbb{F}_5 = \phi$.

Grad gekappten Komplex ergibt sich für alle endlichen Körper $\mathbb{F}_q$

$$\begin{aligned}
\chi({}^{\mathrm{L}}\mathcal{CG}^1_{\leq l}\mathbb{F}_q) &= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot \#(\mathsf{SGen}^1_k\mathbb{F}_q) \\
&= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot (q-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{l}(1-q)^k \\
&= \frac{(1-q)^{l+1}-1}{(1-q)-1} \\
&= \frac{1-(1-q)^{l+1}}{q}.
\end{aligned}$$

- $p = 2$: Für endliche Körper $\mathbb{F}_q$ resultiert

$$\begin{aligned}
\chi({}^{\mathrm{L}}\mathcal{CG}^2_{*}\mathbb{F}_q) &= \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k \cdot \#(\mathsf{SGen}^2_k\mathbb{F}_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-1}\left((-1)^k \cdot (q-1)^k \cdot \frac{(q-1)!}{(q-k-1)!}\right) \\
&= (q-1)! \cdot \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{(-1)^k \cdot (q-1)^k}{(q-k-1)!}\right) \\
&= (q-1)! \cdot \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{(1-q)^k}{(q-k-1)!}\right).
\end{aligned}$$

- $p \geq q$: Der Komplex endet nach dem ersten homologischen Grad und es gilt deshalb

$$\begin{aligned}
\chi({}^{\mathrm{L}}\mathcal{CG}^p_{*}\mathbb{F}_q) &= \#(\mathsf{SGen}^p_0\mathbb{F}_q) - \#(\mathsf{SGen}^p_1\mathbb{F}_q) \\
&= 1-(q-1)^p.
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Anwendung diskreter Morsetheorie

Nun werden wir konkret zu jedem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ in Co-Dimension $p = 1$ die resultierenden Homologiegruppen vollständig und explizit berechnen. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist folgender Satz:

Satz 6.0.1. *(Lineare Grassmann Homologie über endlichen Körpern in Codim $p = 1$) Für endliche Körper $\mathbb{F}_q$ gilt*

$$^{L}\mathcal{GH}^1_k\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{falls } k = 0 \\ (0) & \textit{falls } k > 0,\ k \equiv 0(2) \\ \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \textit{falls } k \equiv 1(2). \end{cases}$$

Diesen Satz beweisen wir im Folgenden u.a. mithilfe diskreter Morsetheorie. Dazu soll erst das angewendete Verfahren kurz erklärt werden.

6.1 Kurzdarstellung der diskreten Morsetheorie für Kettenkomplexe

Entsprechend der Theorie aus [JW] wollen wir einen zu betrachtenden $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex $\mathcal{C}_*$ mit vorgegebener Basis jeweils als gerichteten, gewichteten Graphen darstellen und daraus mithilfe eines geeigneten Matchings einen zu $\mathcal{C}_*$ homotopieäquivalenten Kettenkomplex generieren. Dazu soll das Verfahren aus [JW] zunächst knapp beschrieben werden, wobei die Notation leicht modifiziert ist. Ein $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex $\mathcal{C}_* = (\mathbb{Z}(X_*), \delta_*)$ mit Randoperator $\delta_k(c) = \sum_{c' \in X_{k-1}} [c : c'] \cdot c'$ für $c \in X_k$ sei mit dem Graphen (V, E) identifiziert, wobei die Eckenmenge $V = \bigcup_{k \geq 0} V_k$ aus den Basiselementen $\bigcup_{k \geq 0} X_k$ besteht und genau dann eine Kante $(c, c', [c : c']) \in E$ mit Gewicht $[c : c'] \in \mathbb{Z}$ von $c \in V_k$ nach $c' \in V_{k-1}$ existiert, wenn $[c : c'] \neq 0$ gilt.

Bemerkung 6.1.1. *Diese definierte Zuordnung ist beidseitig. Dabei ist zu beachten, dass ein Kettenkomplex mit fester Basis zwar stets einen Graphen dieser Gestalt erzeugt, jedoch nicht jeder Graph (V, E) mit partitionierter Eckenmenge $V = \bigcup V_k$ und ausschließlich*

Kanten von jeweils V_k nach V_{k-1} und derer von jeder Ecke nur endlich viele einen Kettenkomplex repräsentiert, da nicht zwingend $\delta \circ \delta = 0$ folgt.

Im Folgenden wollen wir unter Graphen stets gerichtete Graphen mit Gewichten in $\mathbb{Z}$ verstehen. Eine Teilmenge der Kantenmenge $\mathcal{M} \subset E$ eines Graphen (V, E) heißt AZYKLISCHES MATCHING, sofern folgende drei Kriterien erfüllt sind:

(1) (Matching) Jede Ecke liegt in maximal einer Kante aus $\mathcal{M}$.

(2) (Invertierbarkeit) $(c, c', [c : c']) \in \mathcal{M} \Longrightarrow [c : c'] = \pm 1$

(3) (Azyklizität) In dem Graphen $(V, E_{\mathcal{M}})$ mit der veränderten Kantenmenge

$$E_{\mathcal{M}} = (E \backslash \mathcal{M}) \cup \left\{ (c, c', -[c : c']) \,\middle|\, (c, c', [c : c']) \in \mathcal{M} \right\}$$

existieren keine gerichteten Zykel, d.h. von keinem Punkt $c \in V$ existiert ein Pfad $p = ((c = c_1) \to c_2 \to \cdots \to (c_r = c))$ zu sich selbst. Dabei bezeichnet $(c_t \to c_{t+1}) = (c_t, c_{t+1}, [c_t, c_{t+1}]) \in E_{\mathcal{M}}$.

Der modifizierte Graph $(V, E_{\mathcal{M}})$ besteht aus den Ecken sowie allen Kanten des ursprünglichen Graphen, wobei allerdings die Kanten des Matchings in ihrer Richtung gedreht und im Gewicht invertiert werden. Wir erweitern den Sprachgebrauch und sagen zu einer Ecke $c \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn c in einer Kante $e \in \mathcal{M}$ liegt. Unter $Path(c, c')$ verstehen wir die Menge aller Pfade $p = ((c = c_1) \to c_2 \to \cdots \to (c_r = c'))$ in dem modifizierten Graphen $(V, E_{\mathcal{M}})$ von c nach c'. Wir definieren zu einem Pfad $p \in Path(c, c')$ ein Gewicht in Form des Produktes aller Teilgewichte: $w(p) := \prod_{t=1}^{r-1} [c_t : c_{t+1}]$. Zu einem azyklischen Matching $\mathcal{M}$ eines von einem Kettenkomplex $(\mathbb{Z}(X^*), \delta_*)$ erzeugten Graphen (V, E) wird der MORSEGRAPH $(V', E')_{\mathcal{M}}$ wie folgt definiert: Die Eckenmenge ist $V' := V \backslash \mathcal{M}$. Eine Kante $(c, c', \Gamma(c : c'))$ von $c \in V'_k$ nach $c \in V'_{k-1}$ existiert genau dann, wenn $\Gamma(c : c') := \sum_{p \in Path(c,c')} w(p) \neq 0$ gilt. Der Morsegraph $(V', E')_{\mathcal{M}}$ bzgl. des Graphen (V, E) eines Kettenkomplex $\mathcal{C}_*$ und eines azyklischen Matchings $\mathcal{M}$ erzeugt wiederum einen Kettenkomplex, den MORSEKOMPLEX $\left(\mathcal{C}_*^{\mathcal{M}}\right)$ von $\mathcal{C}_*$ bzgl. $\mathcal{M}$. Dieser ist definiert durch $\mathcal{C}_k^{\mathcal{M}} = \mathbb{Z}(V'_k)$ mit dem Randoperator $\delta_k(c) = \sum_{\substack{c' \in V'_{k-1}, \\ (c,c',[c:c']) \in E'}} [c : c'] \cdot c'$. In [JW] wird nun folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 6.1.2. *Für den Morsekomplex $\left(\mathcal{C}_*^{\mathcal{M}}\right)$ eines Kettenkomplexes $\mathcal{C}_*$ bzgl. eines azyklischen Matchings $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{C}_*^{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{C}_*$ und deshalb insbesondere $\mathcal{H}_*(\mathcal{C}_*^{\mathcal{M}}) \cong \mathcal{H}_*(\mathcal{C}_*)$.*

In der Gesamtheit der Schritte erzeugt ein von einer Basis erzeugter Kettenkomplex $\mathcal{C}_*$ einen Graphen (V, E), in welchem ein azyklisches Matching $\mathcal{M} \subset E$ gesucht wird, aus dem über den Zwischengraphen $(V, E_{\mathcal{M}})$ der Morsegraph $(V', E')_{\mathcal{M}}$ konstruiert wird, welcher letztendlich den zum ursprünglichen Komplex homotopieäquivalenten Morsekomplex $\mathcal{C}_*^{\mathcal{M}}$ erzeugt.

6.2 Schrittweise Reduktion des G-Kettenkomplexes für Co-Dimension 1

Nun betrachten wir konkret den Grassmannschen Kettenkomplex ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}^1_*\mathbb{F}$ zur Co-Dimension 1, wobei in den ersten Schritten auch unendliche Körper miteinbezogen werden. Zunächst identifizieren wir die Basiselemente aus ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}^1_k\mathbb{F}$ mit den Matrizen aus $\mathsf{SGen}^1_k\mathbb{F}$ und diese wiederum mit den Vektoren aus $(\mathbb{F}^*)^k$. In Folge dessen erhalten wir den isomorphen Komplex:

$$ {}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}^1_k\mathbb{F} \cong \left(\mathbb{Z}(\mathbb{F}^*)^k, \delta_*\right) $$

mit dem Randoperator, der sich mithilfe von $(A.1)$ ergibt:

$$ \delta_k(x) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \cdot \tau_j^k(x) \text{ ,wobei} $$

$$ \tau_j^k(x_1, \cdots, x_k) = \begin{cases} (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_k) & \text{falls } j \in [k] \\ (-\frac{x_1}{x_k}, \cdots, -\frac{x_{k-1}}{x_k}) & \text{falls } j = k+1. \end{cases} $$

Im ersten Schritt werden wir diesen Kettenkomplex verkleinern, ohne die Homologie zu verändern. Es bezeichne $(\mathbb{F}^*)^k_\star := \{(x_1, \cdots, x_k) \in (\mathbb{F}^*)^k \big| x_k \neq (-1) \text{ und } x_j \neq x_{j+1} \text{ für } j \in [k-1]\}$ all jene Vektoren, bei denen weder der letzte Koeffizient (-1) ist, noch zwei aufeinanderfolgende Einträge identisch sind. Wir zeigen im Folgenden, dass der Kettenkomplex ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}^1_*\mathbb{F}$ homotopieäquivalent zu jenem Morse- bzw. Quotientenkomplex $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$ ist, der lediglich von den Elementen aus $(\mathbb{F}^*)^*_\star$ generiert wird.
Wir betrachten zunächst folgenden Hilfs-Kettenkomplex: Es sei X eine Menge. Im k-ten homologischen Grad definieren wir

$$ {}^X\mathcal{S}_k := \mathbb{Z}(X^k) $$

die Gruppe aufgespannt von sämtlichen k-Tupeln über X.

Diese Basiselemente seien verbunden mit dem Randoperator

$$ \delta_k(x) \mapsto \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \cdot \tau_j^k(x), \text{ wobei} $$

$$ \tau_j^k(x_1, \cdots, x_k) = (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_k). $$

Da δ die Bedingung von (3.1.1) erfüllt, bildet $({}^X\mathcal{S}_*, \delta_*)$ einen $\mathbb{Z}$-Kettenkomplex.

Lemma 6.2.1. *Für $X \neq \phi$ ist der Komplex $\left({}^X\mathcal{S}_*, \delta_*\right)$ azyklisch, d.h. $\mathcal{H}^X\mathcal{S}_* = 0$.*

Beweis. Wir zeigen mithilfe diskreter Morsetheorie, dass dieser Komplex homotopieäquivalent zu (0) ist. Dazu wählen wir ein festes $a \in X$ und lösen den Komplex nach diesem Element auf.

Es sei für ein Basiselement $x = (x_1, \cdots, x_k) \in X^k$ die Charakteristik

$$\chi(x) := \begin{cases} k & \text{falls } x_j = a \text{ für alle } j \in [k] \\ min\left\{j \in [k] \middle| x_j \neq a\right\} - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzgl. dem festgelegten a definiert. Die Charakteristik ist die Anzahl der führenden Indizes mit Eintrag a. Ein Element mit Charakteristik m schreiben wir wie folgt: $x = ((a)^m, x_{m+1}, \cdots, x_k)$, wobei $(a)^m = \underbrace{(a, \cdots, a)}_{m}$.

Es bezeichne (V, E) den Graphen von ${}^X\mathcal{S}_*$ bzgl. der Basis X^*. V^k seien die Ecken zugehörig zu den Basispunkten im k-ten homologischen Grad. Wir betrachten zu einer Ecke $x = ((a)^m, x_{m+1}, \cdots, x_k) \in V^k$ zunächst die einzelnen Teile des Randoperators:

$$\tau_j^k(x) = \begin{cases} ((a)^{m-1}, x_{m+1}, \cdots, x_k) & \text{falls } j \leq m \\ ((a)^m, x_{m+1}, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_k) & \text{falls } j > m. \end{cases}$$

Ist m ungerade, so ergibt $\left\{\tau_j^k \middle| j \in [m]\right\}$ genau die Kante

$$\Big(\big((a)^m, x_{m+1}, \cdots, x_k\big), \big((a)^{m-1}, x_{m+1}, \cdots, x_k\big), 1\Big).$$

Die Anteile $\left\{\tau_j^k \middle| j > [m]\right\}$ erzeugen - falls überhaupt - ausschließlich Kanten mit Zielpunkten in V^{k-1} von Charakteristik m, insbesondere hat dies keinen Effekt auf erstere Kante. Ist $\chi(x)$ ungerade, so definieren wir $m(x) := \big((a)^{m-1}, x_{m+1}, \cdots, x_k\big)$ und wählen als Matching:

$$\mathcal{M} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{M}_k, \text{ wobei } \mathcal{M}_k := \left\{x, m(x), 1) \middle| \chi(x) \equiv 1(2)\right\}.$$

Überprüfen wir nun die Kriterien aus (6.1): Zu jedem $x = ((a)^m, x_{m+1} \cdots, x_k) \in V^k$ mit $m = \chi(x)$ ungerade ist $m(x) \in V^{k-1}$ eindeutig definiert und induziert genau eine Kante von Gewicht 1 zu einem Zielpunkt gerader Charakteristik. Also ist insbesondere $x \notin \mathcal{M}_{k+1}$. Ist $x \neq x'$, so ist $x_1 = x_1' = a$ und damit $m(x) \neq m(x')$. Also liegt auch niemals ein Punkt gerader Charakteristik in zwei gematchten Kanten. Da von jedem Punkt x mit ungerader Charakteristik nur eine einzige Kante - konkret die sich im Matching befindliche - zu einem Punkt gerader Charakteristik abgeht, ergibt sich in $(V, E_\mathcal{M})$ überhaupt kein Pfad innerhalb eines homologischen Grades.
Folglich ist $\mathcal{M}$ ein azklisches Matching und damit ${}^X\mathcal{S}_* \simeq {}^X\mathcal{S}_*^\mathcal{M}$. Ist $x = (x_1, \cdots, x_k) \in V^k$ nun eine beliebige Ecke, so ist

$$\begin{cases} ((a, x), x, 1) \in \mathcal{M}_{k+1} & \text{falls } \chi(x) \text{ gerade} \\ (x, m(x), 1) \in \mathcal{M}_k & \text{falls } \chi(x) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Folglich ist das Matching perfekt, so dass der resultierende Morsekomplex keine Ecke und damit auch keine Kante mehr enthält. Da nun ${}^X\mathcal{S}_*^\mathcal{M} = \mathbb{Z}(\phi)$ ist, gilt $\mathcal{H}_*({}^X\mathcal{S}_*) = 0$. □

Bemerkung 6.2.2. *Für die leere Menge gilt*

$$\mathcal{H}({}^{\phi}\mathcal{S}_k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ (0) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gehen wir nun zu dem zu untersuchenden Kettenkomplex $\big(\mathbb{Z}(\mathbb{F}^*)^k, \delta_*\big)$ zurück und betrachten den entsprechenden Graphen (V, E) mit der Eckenmenge $V = \bigcup_{k \geq 0} V^k$, wobei $V^k = (\mathbb{F}^*)^k$.
Einer Ecke $x = (x_1, \cdots, x_k) \in V^k$ ordnen wir $M_x := \{m \in [k-1] \big| x_{k-m} = x_{k-m+1}\}$ und folgende Charakteristik zu:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \geq 1,\ x_k = (-1) \\ min(M_x) & \text{falls } x_k \neq (-1) \text{ und } M_x \neq \phi \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Beispiel für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $\chi(1,2,3,-1) = 0$, $\chi(1,2,2,3) = 2$, $\chi(1,2,3,4) = \infty$.
Mittels über ansteigende Charakteristik sukzessiven Rausdividierens zu ${}^{F^*}\mathcal{S}_*$ isomorpher und damit azyklischer Unterkomplexe, die von einer Teilmenge der Basis erzeugt werden, wollen wir nun zeigen, dass ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_*\mathbb{F}$ homotopieäquivalent zu dem zuvor definierten $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$ - generiert durch $(\mathbb{F}^*)^*_\star \subset (\mathbb{F}^*)^*$ - ist, da $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$ entsprechend seiner Definition genau von den Elementen mit Charakteristik ∞ aufgespannt wird.
Es bezeichne

- $V^k_m := \{x \in V^k \big| \chi(x) = m\}$ die Teilmenge der Ecken im k-ten homologischen Grad, deren Charakteristik genau m ist
- $V^k_{\leq t} := \bigcup_{0 \leq m \leq t} V^k_m$ jene Ecken, deren Charakteristik kleiner oder gleich m ist.

Lemma 6.2.3. *Für alle $t \geq 0$ ist der von $V_{\leq t}$ erzeugte Komplex $(\mathcal{C}V_{\leq t}, \delta_*)$ ein azyklischer Unterkomplex von ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F}$ und folglich der von $V \backslash V_{\leq t}$ aufgespannte Komplex ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F}/\mathcal{C}V_{\leq t}$ homotopieäquivalent zu ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F}$.*

Beweis. Wir induzieren über die Maximalcharakteristik t.
(IA) $t = 0$: Wir betrachten eine Ecke $(x_1, \cdots, x_{k-1}, -1) \in V^k_{\leq 0} = V^k_0$, $k \geq 1$: Wir erhalten für die Randabbildung:

$$\begin{aligned} \delta_k(x) = &\left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \cdot (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_{k-1}, -1)\right) \\ &+ (-1)^{k-1} \cdot (x_1, \cdots, x_{k-1}) + (-1)^k \cdot \left(-\frac{x_1}{-1}, \cdots, \frac{x_{k-1}}{-1}\right) \\ = &\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \cdot (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_{k-1}, -1) \in V^k_{\leq 0}. \end{aligned}$$

Durch die Abbildungen

$$\begin{array}{rlcl} \Psi_k : & V^k_{\leq 0} & \longrightarrow & (\mathbb{F}^*)^{k-1} \\ & (x_1, \cdots, x_{k-1}, -1) & \mapsto & (x_1, \cdots, x_{k-1}) \end{array}$$

erhalten wir einen geshifteten[1] Isomorphismus zu dem azklischen Komplex ${}^{\mathbb{F}^*}\mathcal{S}_*$. Der Quotientenkomplex, der von $V \backslash V_{\leq 0}$ erzeugt wird, ist homotopieäquivalent zu dem vom V aufgespannten, denn wir können jenes Matching aus dem Beweis von (6.2) auf den Teilgraphen $V^k_{\leq 0}$ anwenden und diesen zuzüglich aller aus $V \backslash V_{\leq 0}$ hineingehenden Kanten entfernen.[2]
(IS) $(t-1) \to (t)$ Wir wissen per (IV), dass der Unterkomplex $\mathcal{C}V^*_{\leq(t-1)}$ azklisch ist.
Zu jedem $y \in (\mathbb{F}^*)^t_\star$ erhalten wir einen (um $(t+1)$ homologische Grade verschobenen) zu ${}^{\mathbb{F}^*}\mathcal{S}_*$ isomorphen Unterkomplex von $\mathcal{C}V^*_{\leq t}$: Dazu betrachten wir eine Ecke $x \in V^k_t$, $k \geq (t+1)$. Diese ist aufgrund der Definition von $\chi(x)$ und dementsprechend V^k_t von folgender Gestalt:

$$x = (x_1, \cdots, x_{k-t-1}, y_1, y), \text{ wobei } y = (y_1, \cdots, y_t) \in (\mathbb{F}^*)^t_\star.$$

Betrachten wir den Randoperator auf x angewandt zunächst im Ursprungskomplex $\mathcal{C}V^*$:

$$\tau^k_j(x) = \begin{cases} (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_{k-t-1}, y_1, y) & \text{falls } j \leq (k-t-1) \\ (x_1, \cdots, x_{k-t-1}, y) & \text{falls } j = (k-t) \\ (x_1, \cdots, x_{k-t-1}, y) & \text{falls } j = (k-t+1) \\ (x_1, \cdots, x_{k-t-1}, y_1, y_1, \cdots) & \text{falls } (k-t+1) < j \leq k \\ \begin{cases} \left(-\frac{x_1}{y_t}, \cdots, -\frac{x_{k-t-1}}{y_t}, -\frac{y_1}{y_t}\right) & \text{f. } t = 1 \\ \left(-\frac{x_1}{y_t}, \cdots, -\frac{x_{k-t-1}}{y_t}, -\frac{y_1}{y_t}, -\frac{y_1}{y_t}, \cdots\right) & \text{f. } t > 1 \end{cases} & \text{falls } j = (k+1). \end{cases}$$

Es ist zum einen $\tau^k_{k-t}(x) = \tau^k_{k-t+1}(x)$, zum anderen gilt für alle $j > (k-t+1)$: $\tau^k_j(x) \in \mathcal{C}V^*_{\leq(t-1)}$. Folglich gilt für den Randoperator in ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F}/\mathcal{C}V^*_{\leq(t-1)}$

$$\delta_k(x) = \sum_{j=1}^{k-t-1} (-1)^{j-1} \cdot (x_1, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_{k-m-1}, y_1, y).$$

Die gradverschobenen Isomorphismen zu dem azklischen Hilfskomplex sehen für festes $y \in (F^*)^t_\star$ wie folgt aus:

$$\begin{array}{rlcl} (\Psi_y)_k : & V^k_t & \longrightarrow & (\mathbb{F}^*)^{k-t-1} \\ & (x_1, \cdots, x_{k-t-1}, y_1, y) & \mapsto & (x_1, \cdots, x_{k-t-1}). \end{array}$$

□

Wir bezeichnen den resultierenden Quotientenkomplex, der von $(\mathbb{F}^*)^*_\star$ erzeugt wird - wie oben beschrieben - mit $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$.

[1] Die homologischen Grade verschieben sich hierbei um einen Rang.

[2] Die Gleichheit der Homologie ergibt sich alternativ aus der langen exakten Sequenz auf den Homologiegruppen induziert durch die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{C}V_{\leq t} \to {}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F} \to {}^{\mathsf{L}}\mathcal{C}\mathcal{G}^1_k\mathbb{F}/\mathcal{C}V_{\leq t} \to 0$.

6.3 Umwandlung des G-Kettenkomplexes

Wir wollen nun mittels zwei Transformationen $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$ in einen in Bezug auf weitere Rechenschritte überschaubarer zu kontrollierenden Komplex umwandeln. Zunächst führen wir eine weitere Grundkörper-unabhängige Transformation durch, welche lediglich die Basiselemente umbenennt:
Es sei

$$\begin{array}{llll} \eta: & (\mathbb{F}^*)^k & \longrightarrow & (\mathbb{F}^*)^k \\ & x = (x_t)_{t\in[k]} & \mapsto & (y_t)_{t\in[k]}, y_t = \begin{cases} \frac{x_t}{x_{t+1}} & \text{falls } t < k \\ -x_k & \text{falls } t = k. \end{cases} \end{array}$$

Die Umkehrabbildung zu η ist

$$\begin{array}{llll} \kappa: & (\mathbb{F}^*)^k & \longrightarrow & (\mathbb{F}^*)^k \\ & y = (y_t)_{t\in[k]} & \mapsto & (x_t)_{t\in[k]}, x_t = -\prod_{u=t}^k y_u, \end{array}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \kappa\circ\eta(x_1,\cdots,x_k) &= \kappa\left(\frac{x_1}{x_2},\cdots,\frac{x_{k-1}}{x_k},-x_k\right) \\ &= \left(-\left(\prod_{u=1}^{k-1}\frac{x_u}{x_{u+1}}\cdot(-x_k)\right),\cdots,-\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\cdot(-x_k)\right),-(-x_k)\right) \\ &= (x_1,\cdots,x_k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta\circ\kappa(y_1,\cdots,y_k) &= \eta\left(-(y_1\cdot\cdots\cdot y_k),\cdots,-(y_{k-1}\cdot y_k),-y_k\right) \\ &= \left(\frac{-(y_1\cdot\cdots\cdot y_k)}{-(y_2\cdot\cdots\cdot y_k)},\cdots,\frac{-(y_{k-1}\cdot y_k)}{-y_k},-(-y_k)\right) \\ &= (y_1,\cdots,y_k). \end{aligned}$$

Die Basiselemente aus $(\mathbb{F}^*)^k_\star$ von $\mathcal{L}_k\mathbb{F}$ werden durch η genau in $(\mathbb{F}^*\backslash\{1\})^k$ transformiert, denn für $x\in(\mathbb{F}^*)^k$ gilt: $x_k=-1 \iff (\eta(x))_k = 1$ und $x_j = x_{j+1} \iff (\eta(x))_j = 1$. Betrachten wir nun den bis auf eine durch η erfolgte Umbenennung der Basiselemente unveränderten Komplex $\mathcal{L}_*\mathbb{F}$, der von den Elementen aus $(\mathbb{F}^*\backslash\{1\})^k$ aufgespannt wird. Für die Randoperatoren erhalten wir:

$$\delta_k(y) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\cdot\tau_j^k(y),$$

wobei

$$\tau_j^k(y_1,\cdots,y_k) = \begin{cases} (y_2,\cdots,y_k) & \text{falls } j=1 \\ (y_1,\cdots,y_{j-2},y_{j-1}\cdot y_j,y_{j+1}\cdot\cdots,y_k) & \text{falls } 2\le j\le k \\ (y_1,\cdots,y_{k-1}) & \text{falls } j=(k+1), \end{cases}$$

denn für $y=(y_1,\cdots,y_k)$ und $1<j\le k$ gilt

$$\begin{aligned} \eta\circ\tau_j^k\circ\kappa(y) &= \eta\circ\tau_j^k(-\prod_{u=1}^{k} y_u,\cdots,-y_k) \\ &= \eta\left(-\prod_{u=1}^{k} y_u,\cdots,-\prod_{u=(j-1)}^{k} y_u,-\prod_{u=(j+1)}^{k} y_u,\cdots,-y_k\right) \\ &= \left(\frac{-\prod_{u=1}^{k} y_u}{-\prod_{u=2}^{k} y_u},\cdots,\frac{-\prod_{u=(j-1)}^{k} y_u}{-\prod_{u=(j+1)}^{k} y_u},\frac{-\prod_{u=(j+1)}^{k} y_u}{-\prod_{u=(j+2)}^{k} y_u},\cdots,-(-y_k)\right) \\ &= (y_1,\cdots,y_{j-1}\cdot y_j,y_{j+1},\cdots,y_k). \end{aligned}$$

Ist $j=1$, so gilt

$$\begin{aligned} \eta\circ\tau_1^k\circ\kappa(y) &= \eta\left(-\prod_{u=2}^{k} y_u,\cdots,-y_k\right) \\ &= (y_2,\cdots,y_k), \end{aligned}$$

für $j=(k+1)$ resultiert:

$$\begin{aligned} \eta\circ\tau_{k+1}^k\circ\kappa(y) &= \eta\circ\tau_j^k\left(-\prod_{u=1}^{k} y_u,\cdots,-y_k\right) \\ &= \eta\left(-\frac{-\prod_{u=1}^{k} y_u}{-y_k},\cdots,-\frac{-\prod_{u=k-1}^{k} y_u}{-y_k}\right) \\ &= \eta\left(-\prod_{u=1}^{k-1} y_u,\cdots,-\prod_{u=k-1}^{k-1} y_u\right) \\ &= \eta\left(\frac{-\prod_{u=1}^{k-1} y_u}{-\prod_{u=2}^{k-1} y_u},\cdots,-(-y_{k-1})\right) \\ &= (y_1,\cdots,y_{k-1}). \end{aligned}$$

Eine weitere Transformation ist im Falle eines endlichen Körpers $\mathbb{F}_q$ innerhalb der Körperelemente möglich. Da die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers $(\mathbb{F}_q^*,\cdot)$ stets zyklisch ist, haben wir die Möglichkeit mittels eines festen primitiven Elementes $a\in\mathbb{F}_q^*$ (so dass $\mathbb{F}_q^* =< a >$) diskret zu logarithmieren:

$$\begin{array}{rccc} log_: & \mathbb{F}_q^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{q-1} \\ & a^l & \mapsto & l \end{array}$$

und analog

$$\begin{array}{rccc} (log_a)^k: & (\mathbb{F}_q^*)^k & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_{q-1})^k \\ & (a^{l_1}, \cdots, a^{l_k}) & \mapsto & (l_1, \cdots, l_k), \end{array}$$

wobei $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ist.

6.4 Berechnung der Grassmann Homologie für Co-Dimension $p = 1$

Wir definieren zunächst $\mathbb{Z}_q^\diamond := \mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$. In der Hintereinanderausführung der Basiselement-Umbenennungen

$$(\mathbb{F}_q^*)_\star^k \ni (x) \overset{\cong}{\mapsto} (log_a)^k \circ \eta(x) \in \mathbb{Z}_{q-1}^\diamond$$

erhalten wir den zu $\mathcal{L}_*\mathbb{F}_q$ isomorphen und damit zu ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_*^1\mathbb{F}_q$ homotopieäquivalenten Komplex ${}^{q-1}\mathcal{Z}_*$, wobei für $q \geq 1$:

$${}^q\mathcal{Z}_k = \mathbb{Z}\left((\mathbb{Z}_q^\diamond)^k\right).$$

Der Randoperator sieht wie folgt aus:

$$\delta_k(x) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \cdot \tau_j^k(x),$$

wobei

$$\tau_j^k(x_1, \cdots, x_k) = \begin{cases} (x_2, \cdots, x_k) & \text{falls } j = 1 \\ (x_1, \cdots, x_{j-2}, x_{j-1} + x_j, x_{j+1}, \cdots, x_k) & \text{falls } 1 < j \leq k \\ (x_1, \cdots, x_{k-1}) & \text{falls } j = k+1. \end{cases}$$

Zu beachten ist, dass dies ein homotopieäquivalenter[3] Quotientenkomplex (kein Unterkomplex) von $\left(\mathbb{Z}\left((\mathbb{Z}_q)^k\right), \delta\right)$ ist, wobei alle Basislemente mit mindestens einem verschwindenden Koeffizienten kongruent 0 sind.

Satz 6.4.1. *Für die Homologie von ${}^q\mathcal{Z}_*$ gilt*

$$\mathcal{H}({}^q\mathcal{Z}_k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{falls } k = 0 \\ (0) & \textit{falls } k > 0,\ k \equiv 0(2) \\ \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} & \textit{falls } k \equiv 1(2). \end{cases}$$

[3] Dies wurde hier nur für den Fall bewiesen, dass $q + 1$ eine Primzahlpotenz ist.

Beweis.
Zunächst gilt für die Spezialfälle $q = 1$ und $q = 2$:

- Für $q = 1$ ist $(\mathbb{Z}_q^\diamond)^k = \phi$ für $k > 0$ und $(\mathbb{Z}_q^\diamond)^0 = \{\phi\}$, womit wegen $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \cong (0)$ der Satz bereits bewiesen ist.
- Im Falle $q = 2$ sind wir bereits fertig, da der Komplex bereits die Endgestalt hat (s.u.).

Sei nun $q \geq 3$. Wir betrachten zur Basis $(\mathbb{Z}_q^\diamond)^k_{k\geq 0}$ den Graphen (V, E) zu ${}^q\mathcal{Z}_*$.
Wir definieren für $x = (x_1, \cdots, x_k) \in (\mathbb{Z}_q^\diamond)^k$ folgende Charakteristik:

$$\chi(x) = \begin{cases} k & \text{falls } x_j = 1 \text{ für alle } j \in [k] \\ min\{j \in [k] \big| x_j \neq 1\} - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese zählt die führenden 1-Koeffizienten in x. Das jeweilig einzige Element $(1, \cdots, 1) \in (\mathbb{Z}_q^\diamond)^k$ mit Charakteristik k bezeichnen wir mit $(1)^k$, Elemente mit Charakteristik m schreiben wir als $((1)^m, x_{m+1}, \cdots, x_k)$. Nun erstellen wir ein Matching $\mathcal{M}$, so dass der resultierende Morsekomplex lediglich von den Elementen $\bigcup_{k\geq 1}\{(1)^k\}$ sowie $\{(\phi)_{0\times 1}\}$ im 0-ten homologischen Grad generiert wird, d.h. für $x \in (\mathbb{Z}_q^\diamond)^k$ mit $\chi(x) < k$ gilt: $x \in \mathcal{M}$. Zunächst erweitern wir dazu die Charakteristik χ auf Gesamt-$\mathbb{Z}_q$, indem wir einem Element x mit $x_j = 0$ für mindestens ein $j \in [k]$ die Charakteristik $\chi(x) = -\infty$ zuordnen. Zu festem k schreiben wir $V^k := (\mathbb{Z}_q^\diamond)^k$ für die gesamte Menge der Ecken im k-ten homologischen Grad. Zudem teilen wir V^k in $(k + 1)$ disjunkte Teilmengen entsprechend der Charakteristik auf:

$$V^k_m := \{x \in V^k \big| \chi(x) = m\}.$$

Es bezeichne nun $\tilde{V} := \bigcup_{\substack{m\in[k-1],\\ m\equiv 1(2)}} V^k_m$ jene Ecken außer $(1)^k$ (falls $k \equiv 1(2)$) mit ungerader Charakteristik.
Wir sind nun in der Lage ein Matching anzugeben: Es sei

$$\mathcal{M} := \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{M}_k, \text{ wobei } \mathcal{M}_k := \left\{((x_1, \cdots, x_k), (x_2, \cdots, x_k), 1) \big| x \in \tilde{V}\right\}.$$

Nun sind die drei Bedingungen für azyklische Matchings nach [JW] zu überprüfen. Wir betrachten dazu zunächst ein Element $x = ((1)^m, x_{m+1}, \cdots, x_k) \in \tilde{V}$ und die von ihm direkt nach V^{k-1} abgehenden Pfade in (V, E):

$$\tau^k_j(x) = \begin{cases} ((1)^{m-1}, x_{m+1}, \cdots, x_k) & \text{falls } j = 1 \\ ((1)^{j-2}, 2, (1)^{m-j}, x_{m+1}, \cdots, x_k) & \text{falls } 1 < j \leq m \\ ((1)^{m-1}, x_{m+1} + 1, x_{m+2}, \cdots, x_k) & \text{falls } j = (m + 1) \\ ((1)^m, x_{m+1} + x_{m+2}, x_{m+3}, \cdots, x_k) & \text{falls } j = (m + 2) \\ ((1)^m, x_{m+1}, \cdots) & \text{falls } j > (m + 2). \end{cases}$$

Zu den Kriterien (Matching) und (Invertierbarkeit):
Zunächst gilt wegen $q > 2$: $2 = 1 + 1 \neq 0$. Es ist wegen $m < k$ und $(x_t \neq 0)$ für $t \in [k]$: $\tau_j^k(x) \neq \tau_i^k(x)$ für $j \neq i$.
Also ist $((x_1, \cdots, x_k), (x_2, \cdots, x_k), 1) = (x, \tau_1^k(x), 1) \in E$. Es gilt einerseits $\chi(\tau_1^k(x)) = \chi(x) - 1 \equiv 0(2)$, folglich ist $\tau_1^k(x) \notin \mathcal{M}_{k-1}$. Andererseits ist für $x \neq y \in \tilde{V}$ $x_1 = y_1$ und damit $x_j \neq y_j$ für mindestens ein $j > 1$ und damit $\tau_1^k(x) \neq \tau_1^k(y)$. Also liegt jede Ecke in maximal einer Kante des Matchings.
Zum Nachweis der Azyklizität bezeichne

$$\tilde{\tau}_j^k(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau_j^k(x) \notin \mathcal{M}_k \\ (1, \tau_j^k(x)) & \text{sonst} \end{cases}$$

die entsprechenden gematchten Punkte in $\tilde{V}$ bzw. 0, falls $\tau_j^k(x)$ keinen Pfad innerhalb desselben homologischen Grades induziert.
Die einzigen Pfade, die von einem Punkt $x \in \tilde{V}$ mit $\chi(x) = m$ zu Punkten gleichen homologischen Grades gehen, werden dementsprechend von jenen $\tau_j^k(x)$ generiert, bei denen $j \in [m+1]$ und $j \equiv 0(2)$ oder $j = (m+2)$ gilt, da ansonsten $j = 1$ (Pfad umgedreht) bzw. $\chi(\tau_j^k(x)) \equiv 1(2)$ bzw. $\chi(\tau_j^k(x)) = -\infty$ und damit $\tau_j^k(x) \in \mathcal{M}_{k-1}$ bzw. $\tau_j^k(x) \in (\mathbb{Z}_q^0)^{k-1}$ gilt.
Nun unterteilen wir die Ecken aus dem Matching wie folgt in zwei Hälften:

$$T := \{x \in \tilde{V} \big| \chi(x) \leq (k-2), x_{\chi(x)+2} = 1\},$$

$$\overline{T} := \tilde{V} \backslash T.$$

Wir wählen folgende partielle Ordnung auf $\tilde{V}$:
Es seien $x, y \in \tilde{V}$ mit $\chi(x) = l, \chi(y) = m$:

$$x < y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{T}, y \in T & (1) \text{ oder} \\ x, y \in \overline{T} \text{ und } l < m & (2) \text{ oder} \\ x, y \in T \text{ und } l > m & (3) \text{ oder} \\ (x, y \in \overline{T} \text{ oder } x, y \in T) \text{ und } l = m \text{ und } x_{l+1} < y_{l+1} & (4). \end{cases}$$

Dabei ordnen wir die Elemente von $\mathbb{Z}_q^\diamond$ so, dass stets $x < (x+1)$ gilt, d.h. $\mathbb{Z}_q^\diamond = \{1, 1+1, \cdots, q-2, q-1\}_<$. Zu beachten: Dies ist nur möglich, da die 0 entfernt ist.
Ein Beispiel für $q = 6$ und $k = 6$:

$$\begin{aligned} &(1,2,4,1,1,1) <_{(4)} (1,3,2,1,1,1) &<_{(2)}\ & (1,1,1,2,1,1) <_{(4)} (1,1,1,3,1,1) \\ <_{(1)}\ &(1,1,1,2,1,3) <_{(4)} (1,1,1,3,1,2) &<_{(3)}\ & (1,3,1,5,5,2) <_{(4)} (1,4,1,4,3,2). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass in Pfaden in dem modifizierten Graphen innerhalb von $\tilde{V}$ bzgl. dieser partiellen Ordnung streng monotone Steigung in Pfadrichtung vorliegt, woraus direkt folgt, dass keine Zykel möglich sind. Zunächst gilt prinzipiell für $j = (m+1)$: $\tilde{\tau}_j^k(x) >_{(4)} x$, falls $x_{m+1} \neq (-1)$, ansonsten $\tilde{\tau}_j^k(x) = 0$. Betrachten wir speziell $x \in T$:

- Ist $j < m$, $j \equiv 0(2)$, so folgt $\chi(\tilde{\tau}_j^k(x)) = (j-2)+1 = j-1 < m$, also ist $\tilde{\tau}_j^k(x) >_{(3)} x$.
- Gilt $j = (m+2)$, so ist $(x_{m+1} + x_{m+2}) = (x_{m+1} + 1) \neq 1$, folglich $\chi(\tau_{m+2}^k(x)) = m \equiv 1(2)$ und damit $\tilde{\tau}_j^k(x) = 0$.

Zu beachten: Es ist stets $\chi(\tau_j^k(x)) \leq \chi(x) \leq (k-2) < (k-1)$, so dass sich für $x \in T$ kein direkter Pfad zu $(1)^{k-1}$ ergibt. Da zudem kein Pfad nach $\overline{T}$ führt, ergibt sich überhaupt kein Pfad nach $(1)^{k-1}$.
Sei nun $x \in \overline{T}$:

- Für $j < m$, $j \equiv 0(2)$ ist $\tilde{\tau}_j^k(x) \in T$, also ist $\tilde{\tau}_j^k(x) >_{(1)} x$.
- Analysieren wir $j = (m+2)$, so ist $x_{m+1} + x_{m+2} \neq 1$ und es ergibt sich wegen $\chi(\tau_j^k(x)) = m \equiv 1(2)$ kein Pfad nach $\tilde{V}$. Für andere Teile des Randoperators ist $\chi(\tau_j^k(x)) > m$ und damit entweder $\tilde{\tau}_j^k(x) >_{(2)} x$ oder $\tilde{\tau}_j^k(x) >_{(1)} x$ oder $\tilde{\tau}_j^k(x) = 0$.

Damit ist das Matching azyklisch.

Um die Gewichte in dem resultierenden Morsegraphen und damit das Differential des Morsekomplexes zu ermitteln, betrachten wir nun die Pfade in dem modifizierten Komplex von $(1)^k$ nach $(1)^{k-1}$ und dazu für ein Element der Form $((1)^{k-1}, x_k)$ erneut den Randoperator im Originalkomplex:

$$\tau_j^k((1)^{k-1}, x_k) = \begin{cases} \big((1)^{k-2}, x_k\big) & \text{falls } j = 1 \\ \big((1)^{j-2}, 2, (1)^{k-1-j}, x_k\big) & \text{falls } 1 < j \leq (k-1) \\ \big((1)^{k-2}, x_k + 1\big) & \text{falls } j = k \\ \big((1)^{k-1}\big) & \text{falls } j = (k+1). \end{cases}$$

Sei zunächst $x = (1)^k$, d.h. $x_k = 1$: Für $1 < j \leq (k-1)$ gilt entweder $\tau_j^k((1)^k) \in \mathcal{M}_{k-1}$ (falls j ungerade ist) oder wegen $((k-1-j)+1) > 0$: $\tilde{\tau}_j^k((1)^k) \in T$. Folglich ergibt sich hier kein Pfad. Es bleiben die von τ_1^k, τ_k^k und τ_{k+1}^k induzierten Pfade zu untersuchen.

Zunächst betrachten wir einen ungeraden homologischen Grad k. Es gilt $\tau_k^k((1)^k) \notin \mathcal{M}_k$, da $(k-2)$ ebenso ungerade und $x_k + 1 \neq 1$ ist. Betrachten wir nun τ_1^k und τ_{k+1}^k: Beide Randoperatorteile induzieren einen Pfad nach $(1)^{k-1}$, da jedoch $1 \equiv 1(2)$ und $(k+1) \equiv 0(2)$ gilt, heben sich die beiden Anteile bei der Summation der Pfadgewichte durch das Vorzeichen auf und es ergibt sich überhaupt kein Pfad.

Für gerades k erhalten wir zunächst den direkten Pfad vom Gewicht $(+2)$ durch τ_1^k und τ_{k+1}^k. Es ist der Punkt $\big((1)^{k-1}, 2\big)$ zu untersuchen, der von $(1)^k$ mittels τ_k^k mit Gewicht (-1) und der invertierten Kante $\Big(\big((1)^{k-2}, 2\big), \big((1)^{k-1}, 2\big), -1\Big)$ mit einem Gesamtgewicht von $(-1) \cdot (-1) = +1$ erreicht wird.

Wir zeigen nun, dass von einen Punkt $\big((1)^{k-1}, x_k\big)$, $x_k > 1$ - wobei k gerade ist - genau $(q - x_k)$ Pfade vom Gewicht $(+1)$ nach $(1)^{k-1}$ existieren, wobei die Klassenelemente in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

mit ihrem kleinsten positiven Repräsentanten in $\mathbb{Z}$ identifiziert werden. Dazu betrachten wir die übriggebliebenen Teile des Randoperators. Auch hier induzieren die Anteile τ_j^k für $j \leq (k-2)$ entweder überhaupt keinen Pfad oder der Pfad führt nach T, von wo wie vorher kurz erwähnt kein einziger Pfad nach $(1)^{k-1}$ geht. Da $\chi\left(\tau_{k-1}^k\left((1)^{k-1}, x_k\right)\right) = ((k-1)-2) = (k-3) \equiv 1(2)$, induziert auch τ_{k-1}^k keinen Pfad. Es sind noch τ_k^k und τ_{k+1}^k zu untersuchen. Wir induzieren dafür absteigend über x_k: Ist $x_k = (q-1)$, so liefert τ_k^k einen Punkt von Charakteristik $-\infty$ und τ_{k+1}^k führt nach $(1)^{k-1}$. Diese direkte Kante hat wegen $k+1 \equiv 1(2)$ das Gewicht $(+1)$. Also haben wir hier $(q-(q-1)=1)$ Pfade.

Zum Induktionsschritt $x_k \to x_{k-1}$: Wir erhalten auch hier einen direkten Pfad nach $(1)^{k-1}$ mittels τ_{k+1}^k zuzüglich einer direkten Kante vom Gewicht (-1) über τ_k^k nach $\left((1)^{k-2}, x_k\right)$. Von dort geht eine umgedrehte Kante aus $\mathcal{M}_k$ - wegen der Invertierung vom Gewicht (-1) - nach $\left((1)^{k-1}, x_k\right)$. In der Zusammensetzung resultiert ein Gesamtpfad p vom Gewicht $w(p) = (-1)\cdot(-1) = +1$ nach $\left((1)^{k-1}, x_k\right)$. Von dieser Ecke gehen per Induktionsvoraussetzung $(q - x_k)$ Pfade vom Gewicht $(+1)$ nach $(1)^{k-1}$.
Dies sind zusammengenommen $(q-2)$ Pfade p von $\left((1)^{k-1}, 2\right)$ nach $(1)^{k-1}$ vom Gewicht $w(p) = +1$. Damit erhalten wir zuzüglich des direkten Pfades einen Gesamtpfad von $(1)^k$ nach $(1)^{k-1}$ vom Gewicht $(+q)$. Also gilt $\Gamma\left((1)^k, (1)^{k-1}\right) = \sum_{p \in Path\left((1)^k, (1)^{k-1}\right)} w(p) = 2 + \sum_{i=1}^{q-2} 1 = q$.
Der Morsekomplex wird also von folgendem Graphen erzeugt:

$$\cdots (1)^4 \xrightarrow{q} (1)^3 \qquad (1,1) \xrightarrow{q} (1) \qquad (\phi)_{0\times 1}.$$

Damit ist dieser isomorph zu dem Komplex

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{t \mapsto q\cdot t} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{t \mapsto q\cdot t} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0.$$

Somit hat der homotopieäquivalente Komplex ${}^q\mathcal{Z}$ die oben angegebene Homologie. $\square$
In der Zusammensetzung aller Transformationen gilt

$$^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_*^1\mathbb{F}_q \cong \mathbb{Z}\left(\mathsf{SGen}_*^1\mathbb{F}\right) = \mathbb{Z}\left((\mathbb{F}^*)^*\right) \simeq \mathcal{L}_*\mathbb{F}_q \simeq {}^{q-1}\mathcal{Z}_*,$$

womit wegen der Bekanntheit der Homologie von ${}^{q-1}\mathcal{Z}_*$ unser Hauptresultat zur linearen Grassmann Homologie zur Co-Dimension 1 über endlichen Grundkörpern $\mathbb{F}_q$ bewiesen wäre.

Kapitel 7

Die affine Grassmann Homologie

7.1 Definition der projektiven und affinen Grassmann Homologie

Wir wollen nun unsere Definition der linearen Grassmann Homologie mit jener aus [Ge] abgleichen.

Dazu verstehen wir unter $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}}$ den projektiven Raum - bestehend aus allen eindimensionalen linearen Unterräumen des $\mathbb{F}^{n+1}$. Ganz analog zu der Definition der linearen Grassmann Homologie ist es möglich, zu $\mathbb{F}$ und $p \geq 0$ einen Komplex von den transversalen projektiven Unterräumen fester Co-Dimension p von $\mathbb{P}^{k+p}_{\mathbb{F}}$ mit quasi identischem Randoperator aufzuspannen. Die k-dimensionalen projektiven Unterräume in $\mathbb{P}^{k+p}_{\mathbb{F}}$ entsprechen dabei genau den Elementen aus $G^{k+p+1}_{k+1}\mathbb{F}$.

Die Transversalen, welche minimalen Schnitt zu allen Seiten des Koordinatensimplex in $\mathbb{P}^{k+p}_{\mathbb{F}}$ haben, entsprechen $\hat{G}^{k+p+1}_{k+1}\mathbb{F}$ und damit $\mathsf{SGen}^p_{k+1}\mathbb{F}$. Der in [Ge] definierte Kettenkomplex ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F}$ wird für einen homologischen Grad $k \geq p$ von den $(k-p)$-dimensionalen, projektiven Unterräumen des $\mathbb{P}^k_{\mathbb{F}}$ aufgespannt, der Randoperator ergibt sich aus den Schnitten mit den $(k+1)$ Koordinatenhyperebenen des $\mathbb{P}^k_{\mathbb{F}}$. Die projektive Grassmann Homologie wird in [Ge] definiert als ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^p_k\mathbb{F} := \mathcal{H}_{p+k}({}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F})$. Somit gilt für $k \geq 1$, dass ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^p_k\mathbb{F} \cong {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}^p_{k+1}\mathbb{F}$. Wir wollen die Notation der homologischen Grade des Komplexes an jene der Homologie angleichen, d.h. wir definieren in Abwandlung zu [Ge] ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_k\mathbb{F} := \mathbb{Z}(\hat{G}^{k+p+1}_{k+1}\mathbb{F})$ und entsprechend ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^p_k\mathbb{F} := \mathcal{H}_k({}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F})$. Diese Änderung betrifft nur ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_k\mathbb{F}$ und hat keine Auswirkung auf die homologischen Grade in ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^p_*\mathbb{F}$.

Da der Komplex ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F}$ im 0-ten Grad endet und nicht im (-1)-ten und der Eigenschaft des Randoperators δ_0 von ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F}$, ergibt sich für die Homologie:

$$
{}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^p_k\mathbb{F} \cong \begin{cases} {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}^p_1\mathbb{F} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ und } p \equiv 0(2) \\ {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}^p_{k+1}\mathbb{F} & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Betrachten wir lediglich jene transversalen Unterräume in $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^{k+p}$, die bezüglich des Standard-Skalarprodukts $< x|y >:= \sum_{i=1}^{p+q} x_i \cdot \overline{y_i}$ orthogonal zu der Geraden $\overline{(1)^{k+p+1}}$ stehen, so erhalten wir davon aufgespannt einen Unterkomplex ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}$. Die Homologie des Quotientenkomplexes ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F} = {}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}/{}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}$ definiert die affine Grassmann Homologie ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}_*^p\mathbb{F}$. Es ergibt sich folgende kurze exakte Sequenz zwischen den drei Komplexen:

$$0 \to {}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F} \to {}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F} \to {}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F} \to 0.$$

Eine ausführliche geometrische Beschreibung der Erzeugenden des affinen Grassmannschen Kettenkomplexes liefert [Ge].

7.2 Spezielle supergenerische Matrizen

Als von supergenerischen Matrizen als Basiselementen aufgespannt entspricht der Unterkomplex ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}$ jenem von $\mathsf{SGenZ}_k^p\mathbb{F} := \{D \in \mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F} \big| \sum_{i=1}^p d_{ij} = -1 \text{ für } j \in [k]\}$ erzeugten, da genau für $D \in \mathsf{SGenZ}_k^p\mathbb{F}$ gilt: span $\begin{pmatrix} E_k \\ \cdots \\ D \end{pmatrix} \perp (1)^{k+p}$. Das Erzeugnis $(\mathbb{Z}\left(\mathsf{SGenZ}_k^p\mathbb{F}\right), \delta) \subset (\mathbb{Z}\left(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}\right), \delta)$ stellt real einen Unterkomplex dar, da für $D \in \mathsf{SGenZ}_k^p\mathbb{F}$, eine beliebige Schnittabbildung $A_i^{k+p,k}$, $k < i \leq p$ und Spaltensumme gilt:[1]

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k} A_i^{k+p,k}(D))_{l,j} &= -\frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} + \sum_{l=2}^{i-k} d_{l-1,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot d_{l-1,k} + \sum_{l=i-k+1}^{p} d_{l,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot d_{l,k} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{p} d_{l,j}\right) - d_{i-k,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot \left(1 + \left(\sum_{l=1}^{p} d_{l,k}\right) - d_{i-k,k}\right) \\
&= (-1) - d_{i-k,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} \cdot (1 + (-1) - d_{i-k,k}) \\
&= (-1) - d_{i-k,j} + d_{i-k,j} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Auch hier ist in Relation zum projektiven G-Kettenkomplex die Verschiebung im homologischen Grad um einen Rang zu beachten, d.h. ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}\left(\mathsf{SGenZ}_{k+1}^p\mathbb{F}\right)$ für $k \geq 0$.

Wir können direkt die Elemente von $\mathsf{SGenZ}_k^p\mathbb{F}_q$ bis $p = 2$ bzw. $k = 1$ abzählen:

Lemma 7.2.1. *(Anzahlen supergenerischer Matrizen mit ausschließlicher Spaltensumme (-1))*

(1) $\#(\mathsf{SGenZ}_0^p\mathbb{F}) = 1$ *für* $p \geq 0$.

[1] Für $i \leq k$ entfernt die Schnittabbildung $A_i^{k+p,k}$ lediglich die i-te Spalte der Matrix, so dass auch in $A_i^{k+p,k}(D)$ alle Spaltensummen (-1) ergeben.

(2) $\#(\mathit{SGenZ}_1^p\mathbb{F}_q) = \frac{(q-1)^p+(-1)^{p+1}}{q}$

(3) $\#(\mathit{SGenZ}_k^0\mathbb{F}) = 0$ *für* $k \geq 1$.

(4) $\#(\mathit{SGenZ}_k^1\mathbb{F}) = 1$

(5) $\#(\mathit{SGenZ}_k^2\mathbb{F}_q) = \frac{(q-2)!}{(q-k-2)!}$

Beweis.
Zu (1): Über jedem Körper gilt $\mathsf{SGenZ}_0^p\mathbb{F} = \{(\phi)_{p\times 0}\}$. Für einspaltige Matrizen $k = 1$ induzieren wir über die Zeilenanzahl p: (IA) $p = 0$: $\mathsf{SGenZ}_1^0\mathbb{F}_q = \phi$, d.h. $\#(\mathsf{SGenZ}_1^0\mathbb{F}_q) = 0 = \frac{1-1}{q} = \frac{(q-1)^0+(-1)^1}{q}$.
(IS) $p \longrightarrow (p+1)$: Eine supergenerische $(p\times 1)$-Matrix D lässt sich genau dann mit $x \in \mathbb{F}^*$ zu $\begin{pmatrix} D \\ \cdots \\ x \end{pmatrix} \in \mathsf{SGenZ}_1^{p+1}\mathbb{F}$ fortsetzen, wenn $D \in \mathsf{SGen}_1^p\mathbb{F}\backslash\mathsf{SGenZ}_1^p\mathbb{F}$. Die Fortsetzung ist mit $x = (-1) - (\sum_{i=1}^p d_{i1})$ eindeutig. Also ist

$$\begin{aligned}
\#(\mathsf{SGenZ}_1^{p+1}\mathbb{F}_q) &= \#(\mathsf{SGen}_1^p\mathbb{F}_q) - \#(\mathsf{SGenZ}_1^p\mathbb{F}_q)\\
&= (q-1)^p - \frac{(q-1)^p + (-1)^{p+1}}{q}\\
&= \frac{(q-1)^p\cdot q - (q-1)^p - (-1)^{p+1}}{q}\\
&= \frac{(q-1)^p\cdot(q-1) + (-1)^{p+2}}{q}\\
&= \frac{(q-1)^{p+1} + (-1)^{(p+1)+1}}{q}.
\end{aligned}$$

Ist eine zeilenlose Matrix gegeben, so ist $\mathsf{SGen}_k^0\mathbb{F} = \{(\phi)_{0\times k}\}$. Da jede Spaltensumme 0 ergibt, ist $\mathsf{SGenZ}_k^0\mathbb{F} = \phi$ für $k > 0$. Für einzeilige Matrizen $p = 1$ erhalten wir $\mathsf{SGenZ}_k^1\mathbb{F} = \{(-1)^k \in \mathbb{F}^{1\times k}\}$. Gilt $p = 2$, so ist $D = (d_{1,1}, \cdots d_{1,k}) \in \mathsf{SGen}_k^1\mathbb{F}$ genau dann zu $D' \in \mathsf{SGenZ}_k^2\mathbb{F}$ fortsetzbar, wenn $d_{1,j} \neq d_{1,i}$ für $i \neq j$ und $d_{1,j} \neq (-1)$ für $j \in [k]$. Die Fortsetzung ist mit $\begin{pmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,k} \\ -1-d_{1,1} & \cdots & -1-d_{1,k} \end{pmatrix}$ eindeutig.

□

7.3 Direkt berechenbare Homologiegruppen der affinen GH

Folgende Gruppen der affinen Grassmann Homologie können wir mit Zurhilfenahme der Resultate für die lineare Variante unmittelbar bestimmen:

- Es ist ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}^0_k\mathbb{F} \cong 0$ für $k \geq 0$, also ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^0_k\mathbb{F} \cong {}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}^0_{k+1}\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}$ für $k \geq 0$, ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^0_{-1}\mathbb{F} \cong 0$. Zusammengesetzt mit dem ersten Resultat aus (5.2) ergibt sich wegen $\delta_1 = 0$ und $\delta_0 = 0$:

$$
{}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}^0_k\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

- Der Unterkomplex ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}^1_*\mathbb{F}$ ist azyklisch, da er (in Matrizenschreibweise) in jedem homologischen Grad $(k-1)$, $k \geq 0$ von dem Element $(-1)^k \in (\mathbb{F}^*)^k$ erzeugt wird und der Randoperator alternierend surjektiv (k gerade) und die Nullabbildung (k ungerade) ist.

  Folglich gilt ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}^1_k\mathbb{F}_q \cong {}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}^1_k\mathbb{F}_q \cong {}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}^1_{k+1}\mathbb{F}_q$ für alle endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ sowie $k \geq 0$. Damit erhalten wir:

$$
{}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}^1_k\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}
$$

- Ist $p \geq q$, so endet ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F}$ und damit auch ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^p_*\mathbb{F}$ nach dem nullten homologischen Grad. Da $\mathsf{SGen}^p_0\mathbb{F} = \mathsf{SGenZ}^p_0\mathbb{F} = (\phi)_{p\times 0}$ und damit ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_{-1}\mathbb{F} = {}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}^p_{-1}\mathbb{F}$ gilt, ist ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^p_{-1}\mathbb{F} = 0$. Also ist dieser Komplex nur im 0-ten homologischen Grad verschieden (0). Daraus resultiert wegen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rang}({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^p_0\mathbb{F}) &= \operatorname{rang}({}^{\mathtt{P}}\mathcal{CG}^p_0\mathbb{F}) - \operatorname{rang}({}^{\mathtt{H}}\mathcal{CG}^p_0\mathbb{F}) \\
&= \#(\mathsf{SGen}^p_1\mathbb{F}_q) - \#(\mathsf{SGenZ}^p_1\mathbb{F}_q) \\
&= \#(\mathsf{SGenZ}^{p+1}_1\mathbb{F}_q) \\
&= \frac{(q-1)^{p+1} + (-1)^{(p+1)+1}}{q} \\
&= \frac{(q-1)^{p+1} + (-1)^p}{q}:
\end{aligned}
$$

$$
{}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}^p_k\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\frac{(q-1)^{p+1}+(-1)^p}{q}} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{falls } p \geq q.
$$

7.4 Eulercharakteristiken der affinen GH

- Wir betrachten den Komplex zu Co-Dimension $p = 0$: Für beliebige Körper und den nach dem l-ten Grad abgeschnittenen Komplex ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^0_{\leq l}\mathbb{F}$ gilt $\chi({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^0_{\leq l}\mathbb{F}) = 1$ für l gerade bzw. $\chi({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^0_{\leq l}\mathbb{F}) = 1$ für l ungerade.

- Auch bei dem Komplex zu Co-Dimension $p = 1$ muss nach einem festen Grad l gekappt werden, um eine Eulercharakteristik zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\chi\left({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^1_{\leq l}\mathbb{F}_q\right) &= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot \operatorname{rang}({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^1_k\mathbb{F}_q) \\
&= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot \left(\#(\mathsf{SGen}^1_{k+1}\mathbb{F}_q) - \#(\mathsf{SGenZ}^1_{k+1}\mathbb{F}_q)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot \left((q-1)^{k+1} - 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \cdot (q-1)^{k+1} + \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1} \\
&= -\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^k \cdot (q-1)^k + \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1} \\
&= 1 - \chi\left({}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}^1_{\leq(l+1)}\mathbb{F}_q\right) + \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1} \\
&= 1 - \frac{1-(1-q)^{l+2}}{q} + \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1} \\
&= \begin{cases} \frac{(1-q)^{l+2}-1}{q} & \text{falls } l \text{ gerade} \\ \frac{(1-q)^{l+2}-1}{q} + 1 & \text{falls } l \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

- Zur Co-Dimension $p = 2$ findet sich keine kurze Formel, es ist

$$\begin{aligned}
\chi\left({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^2_{*}\mathbb{F}_q\right) &= \sum_{k=0}^{q-2}(-1)^k \cdot \operatorname{rang}({}^{\mathtt{A}}\mathcal{CG}^2_k\mathbb{F}_q) \\
&= \sum_{k=0}^{q-2}(-1)^k \cdot \left(\#(\mathsf{SGen}^2_{k+1}\mathbb{F}_q) - \#(\mathsf{SGenZ}^2_{k+1}\mathbb{F}_q)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{q-2}(-1)^k \cdot \left((q-1)^{k+1} \cdot \frac{(q-1)!}{(q-k-2)!} - \frac{(q-2)!}{(q-k-3)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{q-2}(-1)^k \cdot (q-1)^{k+1} \cdot \frac{(k+1)\cdot(q-2)!}{(q-k-2)!} \\
&= -(q-2)! \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k \cdot (1-q)^k}{(q-k-1)!}.
\end{aligned}$$

Kapitel 8

Supergenerische Matrizen als Varietät

Wir können die Menge der supergenerischen Matrizen $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ - und damit das generische Stratum der Grassmannschen - als Komplement der Vereinigung der Nullstellenmengen der $\binom{k+p}{k}-1$ Polynome

$$\begin{array}{rccc} p_{I,J}: & \mathbb{F}^{p\times k} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & D & \mapsto & \det(D_{I,J}), \end{array}$$

wobei $I \in 2^{[p]}, J \in 2^{[k]}, \#I = \#J > 0$ gilt, auffassen. Dies entspricht dem Komplement der Nullstellenmenge des Polynoms $p(D) = \prod p_{I,J}$ über $\mathbb{F}^{p\times k}$ und dieses der Nullstellenmenge des Polynoms

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathbb{F}^{p\times k}\times\mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & (D,y) & \mapsto & p(D)\cdot y - 1, \end{array}$$

indem wir $D \in \mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ mit $\left(D, \frac{1}{p(D)}\right)$ in der Nullstellenmenge von q identifizieren. Folglich ist $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}$ als Hyperfläche im $\mathbb{F}^{p\times k+1}$ und damit als $(p\cdot k)$-dimensionale Varietät auffassbar.

Da für eine feste Körpercharakteristik, d.h. Primzahl q, und vorgegebene $p, k \geq 0$ zu jedem $r \geq 1$ der Wert $\#\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_{q^r}$ die Anzahl der Elemente der Varietät angibt, ist die Zeta-Funktion

$$\zeta(t) := \zeta_{p,k,q}(t) := exp\left(\sum_{r\geq 1}(\#\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_{q^r})\cdot\frac{t^r}{r}\right)$$

nach der Weil-Vermutung (vgl. dazu [Ha]) stets eine rationale Funktion $\zeta = \frac{P}{Q}$, d.h. es existieren geeignete Polynome P und Q. Diese Darstellung können wir für die Fälle, bei denen wir die Anzahl der Elemente von $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_{q^r}$ kennen, direkt ermitteln. Zunächst gilt unter Verwendung der Logarithmusreihe:

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 1}\frac{x^r}{r} = \sum_{r\geq 0}\frac{x^{r+1}}{r+1} &= \sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^{r+1}\cdot(-1)^{r+1}\cdot x^{r+1}}{r+1}\\ &= -\sum_{r\geq 0}(-1)^r\cdot\frac{(-x)^{r+1}}{r+1} = -ln(1-x)\end{aligned}$$

für $-1 \leq x < 1$. Im Folgenden wollen wir lediglich von einer formalen Potenzreihe sprechen und umgehen so die Konvergenzbedingung.

Ist nun zu festem $p, k \geq 0$ die Anzahl $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_*)$ polynominial, d.h. existiert ein Polynom

$$\begin{array}{rccl}\eta = \eta_{p,k}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & \eta(t) = \sum_{j=0}^m a_j\cdot t^j,\end{array}$$

so dass $\eta(q^r) = \#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_{q^r})$ für jede Primzahlpotenz q^r gilt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= exp\left(\sum_{r\geq 1}(\#\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_{q^r})\cdot\frac{t^r}{r}\right)\\ &= exp\left(\sum_{r\geq 1}\eta(q^r)\cdot\frac{t^r}{r}\right)\\ &= exp\left(\sum_{r\geq 1}\left(\sum_{j=0}^m a_j\cdot q^{r\cdot j}\right)\cdot\frac{t^r}{r}\right)\\ &= exp\left(\sum_{j=0}^m a_j\cdot\sum_{r\geq 1}\frac{(t\cdot q^j)^r}{r}\right)\\ &= exp\left(\sum_{j=0}^m a_j\cdot\left(-ln(1-t\cdot q^j)\right)\right)\\ &= \prod_{j=0}^m(1-t\cdot q^j)^{-a_j}\\ &= \frac{\prod_{\substack{0\leq j\leq m,\\ a_j<0}}(1-t\cdot q^j)^{|a_j|}}{\prod_{\substack{0\leq j\leq m,\\ a_j>0}}(1-t\cdot q^j)^{a_j}}.\end{aligned}$$

Dies können wir nun anwenden, um einige Beispiele zu berechnen:

- $p = 0$: Da $\#(\mathsf{SGen}_k^0\mathbb{F}) = 1$ für alle Körper $\mathbb{F}$ gilt, insbesondere also für alle endlichen

Körper $\mathbb{F}_{q^r}$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= exp\left(\sum_{r\geq 1}\frac{t^r}{r}\right) = exp\left(-ln(1-t)\right)\\ &= \frac{1}{1-t}.\end{aligned}$$

- $p = 1$: Zu festem $k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\#(\mathsf{SGen}^1_k\mathbb{F}_{q^r}) &= (q^r-1)^k\\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot(-1)^{k-j}\cdot q^{j\cdot r}\end{aligned}$$

und damit

$$\zeta(t) = \frac{\prod_{\substack{0\leq j<k,\\ (k-j)\equiv 1(2)}}(1-t\cdot q^j)^{\binom{k}{j}}}{\prod_{\substack{0\leq j\leq k,\\ (k-j)\equiv 0(2)}}(1-t\cdot q^j)^{\binom{k}{j}}}.$$

- $p = 2$: Unter $S_1(k,i)$ verstehen wir die vorzeichenlosen Stirling-Zahlen erster Art[1]. Es gilt $\frac{(q^r-1)!}{(q^r-k-1)!} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\cdot S_1(k,i)\cdot q^{j\cdot r}$. Zu festem $k \geq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\#(\mathsf{SGen}^2_k\mathbb{F}_{q^r}) &= (q^r-1)^k\cdot\frac{(q^r-1)!}{(q^r-k-1)!}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot(-1)^{k-j}\cdot q^{j\cdot r}\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\cdot S_1(k,i)\cdot q^{j\cdot r}\right)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{j+i}\cdot\binom{k}{j}\cdot S_1(k,i)\cdot q^{(j+i)\cdot r}\right)\\ &= \sum_{l=0}^{2\cdot k}(-1)^l\cdot a_l\cdot q^{l\cdot r},\end{aligned}$$

wobei

$$a_l = \sum_{j=max(l-k,0)}^{min(l,k)}\binom{k}{j}\cdot S_1(k,l-j)$$

und daraus resultierend

$$\zeta(t) = \frac{\prod_{\substack{0\leq l<2\cdot k,\\ l\equiv 1(2)}}(1-t\cdot q^l)^{a_l}}{\prod_{\substack{0\leq l<2\cdot k,\\ l\equiv 0(2)}}(1-t\cdot q^l)^{a_l}}.$$

[1]Definierbar durch $S_1(0,0)=1$, $S_1(k,i)=S_1(k-1,i-1)+k\cdot S_1(k-1,i)$.

Kapitel 9

Abschluss

9.1 Offene Fragen und Vermutungen

Trotz des relativ hohen Aufwandes bleiben wesentlich mehr Fragen in Bezug auf das generische Stratum der Grassmannschen, supergenerische Matrizen sowie den G-Kettenkomplex und die Grassmann Homologie offen, als beantwortet wurden. Einige Denkansätze und Ideen seien dazu im Folgenden stichpunktartig aufgelistet:

- (Generelle Anzahl supergenerischer Matrizen) Gesucht wird eine generelle Ermittlung der Anzahl $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q)$ supergenerischer Matrizen für $p, k > 2$. Abgemildert wäre eine Näherungsformel für $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q)$ sowie genaue Teilbarkeitsregeln für $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q)$ interessant.

  Bekannt ist, dass $\lim_{q\to\infty} \frac{\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q)}{\#(\mathbb{F}^{p\times k})} = 1$.
  Wegen der Stabilität supergenerischer Matrizen unter Zeilen-/Spaltenmultiplikationen gilt:

  $$(q-1)^{k+p-1} \Big| \#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q),$$

  wegen der Möglichkeit der Spalten-/ und Zeilenpermutation und der zwingenden paarweisen Unterschiedlichkeit von Spalten / Zeilen sogar

  $$(\max(p,k)-2)\cdot(q-1)^{k+p-1} \Big| \#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q).$$

  Möglicherweise gilt[1]:

  - $\#(\mathsf{SGen}_3^3\mathbb{F}_q) = \Big((q-1)^5\Big)\cdot\Big((q-2)\cdot(q-3)\cdot(q^2-9\cdot q+21)\Big)$,
  - $\#(\mathsf{SGen}_4^3\mathbb{F}_q) = \Big((q-1)^6\Big)\cdot\Big((q-3)\cdot(q-5)\cdot(q^4-20\cdot q^3+148\cdot q^2-468\cdot q+498)\Big)$.

[1] Diese Resultate sind in keiner Weise gesichert, sondern mittels experimenteller Berechnungen als Hypothese aufgestellt.

Bemerkenswert an diesen Polynomen ist, dass sie über den reellen Zahlen nicht vollständig in Linearfaktoren zerfallen. Eine weitere Vermutung zur prinzipiellen Anzahl supergenerischer Matrizen ist, dass für beliebige p und k über endlichen Körpern jeweils $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F})$ polynominial ist, d.h. ein Polynom $\nu_{p,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\nu_{p,k}(q) = \#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F})$ für alle Primzahlpotenzen (oder zumindest Primzahlen) q mit $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q \neq \phi$. Ferner ist anzunehmen, dass der Grad des Polynomes jeweils $(p \cdot k)$ und der höchste Koeffizient stets 1 ist, dass die Vorzeichen der nachfolgenden Koeffizienten alternieren und jeder Koeffizient ganzzahlig ist.

Zur Bestimmung der Anzahlen wäre die Anwendung einer 'Normalform' supergenerischer Matrizen gegebenenfalls sinnvoll. Ein Beispiel: Wir definieren einen Matrizentyp der Form $T \in \mathbb{F}^{(p-1)\times(k-1)}$, so dass die um eine Spalte und Zeile mit durchgängigen 1-Einträgen ergänzte $(p\times k)$-Matrix supergenerisch ist. Die Matrizen mit dieser Eigenschaft bilden in der Gesamtheit ein vollständiges Repräsentantensystem der supergenerischen Matrizen modulo der Spalten- und Zeilenmultiplikationen mit Körperelementen verschieden 0. Dies kann eventuell weitere Aufschlüsse geben, sich der Anzahl und Struktur supergenerischer Matrizen zu nähern. Solche Matrizen T sind nicht nur supergenerisch, sondern haben zusätzliche Eigenschaften: So darf z.B. kein Eintrag 1 sein und in einer Zeile oder Spalte dürfen nie gleiche Einträge vorhanden sein. Eine weitere Verschärfung kann erzielt werden, indem man die Grundkörperelemente totalordnet und unter Berücksichtigung der Stabilität supergenerischer Matrizen unter Zeilen- und Spaltenpermutationen fordert, dass die Elemente der ersten Zeile und Spalte von T jeweils streng monoton bzgl. des Index angeordnet werden.

- (Exaktes Ende des G-Kettenkomplexes) Es fehlt die Angabe des exakten Endes l von ${}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F}_q$ für $p \geq 3$, d.h. $l := max\{k \in \mathbb{N} \big| \#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q) \neq 0\}$. Dieses Komplexende ist in eine Funktion $\eta : (q,p) \mapsto l$ überführbar. Von dieser Funktion η ist bislang bekannt: $\eta(q,0) = \eta(q,1) = \infty$, $\eta(q,2) = q-1$, $\eta(q,p) \leq q-1$ für $p \geq 3$, $\eta(q,p) = 1$ für $p \geq q$. Per experimenteller Berechnungen ist z.B. $\eta(4,3) = \eta(5,3) = 3$ und $\eta(7,3) = 5$ ermittelt worden.

- (Matrizenbaum) Nicht jede supergenerische Matrix ist 'gleich'. So lässt sich beispielsweise
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathsf{SGen}_3^3\mathbb{F}_{11}$$
mit $x \in (\mathbb{F}_{11})^3$ auf 310 Art und Weisen zu $(A|x) \in \mathsf{SGen}_4^3\mathbb{F}_{11}$,
$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathsf{SGen}_3^3\mathbb{F}_{11}$$
hingegen sogar mit 340 verschiedenen x zu $(B|x) \in \mathsf{SGen}_4^3\mathbb{F}_{11}$ fortsetzen.

Die Ermittlung der Strukturen von $\mathsf{SGen}_*^p\mathbb{F}_q$ könnte deshalb in Form eines von den Parametern Körper $\mathbb{F}_q$ und Zeilenanzahl p generierten Baumes mit der Eckenmenge im k-ten Grad $V^k := \left(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q/P_k\right)/S_p$ erfolgen. Dabei ist $P_k \subset \mathbb{F}^{k\times k}$ bzw. $S_p \subset \mathbb{F}^{p\times p}$ jeweils die Gruppe der $(q-1)^k \cdot k!$ bzw. $(q-1)^p \cdot p!$ Matrizen, die sich ergeben, wenn man die Zeilen und Spalten der $k!$ bzw. $p!$ Permutationsmatrizen mit nichtverschwindenden Faktoren durchmultipliziert, wobei P_k mittels rechts- und S_k mittels linksseitiger Multiplikation auf $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q$ operiert. Eine supergenerische Matrix $\overline{D} \in V^k$ als Repräsentant sei genau dann durch eine Kante mit $\overline{D'} \in V^{k+1}$ verbunden, wenn sich D mit einem Spaltenvektor $v \in (\mathbb{F}^*)^k$ zu $(D|v) \sim D'$ fortsetzen lässt (dies ist äquivalent zu $(D')_{[p],J} \sim D$ für $J \in \binom{k}{k-1}$).

- (Grassmann Homologie für Codim 1 und unendliche Körper $\mathbb{F}$) Die Bestimmung von ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^1\mathbb{F}$ für unendliche Körper $\mathbb{F}$ ist noch offen. Bekannt ist, dass ${}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}_*^1\mathbb{F} \cong {}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}_*^1\mathbb{F}$. Dies folgt aus ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{GH}_*^1\mathbb{F} = 0$.

- (Errechnung der Grassmann Homologie für Co-Dimension 2) Ein erster Schritt zur generellen Ermittlung der Grassmann Homologie-Gruppen wäre die Errechnung von ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_q$ sowie von ${}^{\mathtt{H}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_q$ und ${}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_q$. Abgemildert könnte man den freien Anteil der Gruppen bestimmen. Eine sehr vage Hypothese dazu sei aufgestellt: Der freie Anteil von ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_q$ konzentriert sich auf den letzen homologischen Grad $q-1$. Wegen der Eulercharakteristik $\chi({}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_q) = (q-1)! \cdot \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{(1-q)^k}{(q-k-1)!}\right)$ würde dann gelten: ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_{q-1}^2\mathbb{F}_q \cong \mathbb{Z}^{(q-1)!\cdot\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{(q-1)^k}{(q-k-1)!}\right)}$. Jedoch ist durch computergestützte Berechnungen bereits bekannt, dass für $q \geq 5$ teilweise Torsionsanteile auftreten, möglicherweise jedoch erst in höheren homologischen Graden des Komplexes. Eine zentrale Schwierigkeit in der Berechnung der Homologie, d.h. - wenn man diskrete Morsetheorie anwenden möchte - bei der Suche nach möglichst umfassenden azyklischen Matchings, besteht darin, dass bei der Operation des Randoperators auf supergenerischen Matrizen im Gegensatz zu Co-Dimension 1 zusätzlich zur Multiplikation auch die Körperaddition in $\mathbb{F}$ berücksichtigt werden muss und zudem die Anzahl der Erzeugenden sehr schnell ansteigt. Ein manuell durchgeführtes Matching für den Körper $\mathbb{F}_3$ mit dem entsprechenden G-Kettenkomplex ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{CG}_*^2\mathbb{F}_3 \cong (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^4, \mathbb{Z}^8)$ liefert ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_3 \cong (0, 0, \mathbb{Z}^5)$. Bei noch höheren Co-Dimensionen kommt als weitere Schwierigkeit hinzu, dass die Ränge der Kettengruppen im Ursprungskomplex noch nicht bekannt sind.

Anhang A

Zusammenfassung der Resultate

Es folgt eine knappe Zusammenfassung der wesentlichen Definitionen und Resultate dieser Arbeit in formaler Notation ohne Begleittext.

A.1 Begriffe

- (Grundbegriffe) $\mathbb{F}$ Körper, $n \geq 0$, $I \subset [n] := \{1, \cdots, n\}$: $\Delta_I^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n \big| x_i = 0 \text{ für } i \in I\}$, $KS_*^n\mathbb{F} = \bigcup_{I\subset[n]} \Delta_I^n$ Koordinatensimplex im $\mathbb{F}^n$.

- (Transversalität) $U \subset \mathbb{F}^n$ k-dimensionaler, linearer Unterraum.
  U transversal $:\Longleftrightarrow U \cap \Delta_I^n$ minimal für $\Delta_I^n \in KS_*^n\mathbb{F}$,
  d.h. $\dim(U \cap \Delta_I^n) = \max(\dim(U) - \#(I))$.

- (Generisches Stratum der Grassmannschen)
  $\hat{G}_k^n\mathbb{F} := \{U \subset \mathbb{F}^n \big| U \text{ } k\text{-dimensionaler transversaler lineare Untervektorraum}\}$

- (Der G-Kettenkomplex) Zu den Parametern Körper $\mathbb{F}$ und Co-Dimension $p \geq 0$: ${}^{\mathrm{L}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} := \mathbb{Z}\Big(\hat{G}_k^{k+p}\mathbb{F}\Big)$ mit dem Randoperator
  $\delta_k(U) := \sum_{i=1}^{k+p}(-1)^{i-1} \cdot (U \cap \Delta_i^{k+p})$. Dabei wird Δ_i^{k+p} kanonisch mit $\mathbb{F}_{k+p-1}$ durch Entfernen der i-ten Koordinate identifiziert.

- (Lineare Grassmann Homologie) ${}^{\mathrm{L}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F} := \mathcal{H}_k({}^{\mathrm{L}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F})$.

- (Supergenerische Matrizen) $D \in \mathbb{F}^{p\times k}$ SUPERGENERISCH $:\Longleftrightarrow$ jede quadratische Untermatrix von D ist invertierbar.

- (Raum der supergenerischen Matrizen) $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F} := \{D \in \mathbb{F}^{p\times k} \big| D \text{ supergenerisch}\}$

- Es gilt der Satz: $\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F} \cong \hat{G}_k^{k+p}\mathbb{F}$.

- (Matrizenschreibweise für den G-Kettenkomplex)
$^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} \cong \mathbb{Z}\Big(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}\Big)$ mit dem Randoperator

$$\delta_k(D) = \sum_{i=1}^{k+p}(-1)^{i-1}\cdot\tau(D),$$

wobei für $i \in [k]$:

$$\tau_i(D) = D_{[p],\overline{\{i\}}}\text{falls } i \in [k]$$

sowie für für $k < i \leq k+p$:

$$\tau_i(D)_{l,j} = \begin{cases} -\frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}} & \text{falls } l = 1, \\ d_{l-1,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}}\cdot d_{l-1,k} & \text{falls } 1 < l \leq (i-k), \\ d_{l,j} - \frac{d_{i-k,j}}{d_{i-k,k}}\cdot d_{l,k} & \text{falls } (i-k) < l. \end{cases}$$

- (Projektiver G-Komplex)
Dieser wird analog durch transversale Unterräume im projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^{p+k}$ generiert. Es gilt $^{\mathsf{P}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} \cong {}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_{k+1}^p\mathbb{F}$ für $k \geq 0$.[1]

- (Projektive Grassmann Homologie)
Es gilt

$$^{\mathsf{P}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F} \cong \begin{cases} ^{\mathsf{L}}\mathcal{GH}_1^p\mathbb{F} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \text{ und } p \equiv 0(2) \\ ^{\mathsf{L}}\mathcal{GH}_{k+1}^p\mathbb{F} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Der Unterkomplex $^{\mathsf{H}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} \lhd {}^{\mathsf{P}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$ wird aufgespannt von den k-dimensionalen, transversalen Unterräumen des projektiven Raums $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^{k+p}$ senkrecht $\overline{(1,\cdots,1)}$ (bzw. isomomorph aufgespannt von $\{U \in \hat{G}_{k+1}^p\mathbb{F} | U \perp (1,\cdots,1)\}$ bzw. von $\{D \in \mathsf{SGen}_{k+1}^p\mathbb{F} | \text{jede Spaltensumme von } D \text{ ist } -1\}$.

- (Affine Grassmann Homologie)
$^{\mathsf{A}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F} = \mathcal{H}_k({}^{\mathsf{A}}\mathcal{CG}_*^p\mathbb{F})$, wobei $^{\mathsf{A}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} := {}^{\mathsf{P}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F} \Big/ {}^{\mathsf{H}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$.

A.2 Anzahl der Erzeugenden

Für die Anzahl der Erzeugenden von $^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}$, d.h. $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F})$, gilt:

- (Symmetrie) $\text{rang}({}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_k^p\mathbb{F}) = \text{rang}({}^{\mathsf{L}}\mathcal{CG}_p^k\mathbb{F})$

- $p = 0$: $\#(\mathsf{SGen}_k^0\mathbb{F}) = 1$ (über allen Körpern $\mathbb{F}$).

[1] Die Notation des Komplexes ist im Gegensatz zu [Ge] um p homologische Grade verschoben, jene der Homologie nicht.

- $p = 1$: $\#(\mathsf{SGen}_k^1\mathbb{F}_q) = (q-1)^k$
- $p = 2$: $\#(\mathsf{SGen}_k^2\mathbb{F}_q) = (q-1)^k \cdot \frac{(q-1)!}{(q-k-1)!}$ ($= 0$ für $k \geq q$).
- $p \geq 3, k > 2$: prinzipiell unbekannt, außer zwei Vermutungen:

$$\#(\mathsf{SGen}_3^3\mathbb{F}_q) = ((q-1)^5 \cdot (q-2) \cdot (q-3)) \cdot (q^2 - 9 \cdot q + 21),$$

$$\#(\mathsf{SGen}_4^3\mathbb{F}_q) = ((q-1)^6 \cdot (q-3) \cdot (q-5)) \cdot (q^4 - 20 \cdot q^3 + 148 \cdot q^2 - 468 \cdot q + 498).$$

  Sicher gilt: $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}_q) = 0$ für $k \geq q$. (Diese Schranke ist jedoch nicht exakt) sowie $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F}) = 0$ für $p \geq q, k \geq 2$.

- Für unendliche Körper $\mathbb{F}$ und $p, k > 0$ ist die Kardinalität von $\#(\mathsf{SGen}_k^p\mathbb{F})$ gleich jener von $\mathbb{F}$.

Affine Grassmann Homologie: ($k \geq 0$):

- $p = 0$: Stets 1 (über allen Körpern $\mathbb{F}$).
- $p = 1$: $(q-1)^{k+1} - 1$
- $p = 2$: $\frac{(q-2)! \cdot \left((q-1)^{k+1} - q + k + 3\right)}{(q-k-2)!}$ ($= 0$ für $k \geq (q-1)$).
- $p \geq 3, k > 0$: Die Schranke ist bislang prinzipiell unbekannt, außer 0 für $k \geq (q-1)$ (Diese Schranke ist nicht exakt, jedoch exakt die Schranke des linearen Grassmann-Komplexes).
- $k = 0$: $\frac{(q-1)^{p+1} + (-1)^p}{q}$

A.3 Homologie-Gruppen

Nur wenige Homologie-Gruppen sind explizit bekannt. Diese sind:

- Zur Co-Dimension $p = 0$ über jedem Körper $\mathbb{F}$:

  - Lineare Grassmann Homologie: ${}^{\mathtt{L}}\mathcal{GH}_*^0\mathbb{F} \cong (0)$.
  - Affine und projektive Grassmann Homologie:

$${}^{\mathtt{A}}\mathcal{GH}_k^0\mathbb{F} = {}^{\mathtt{P}}\mathcal{GH}_k^0\mathbb{F} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Hauptresultat für Co-Dimension $p = 1$: Über endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ gilt (für jede Primzahlpotenz q):

– Lineare Grassmann Homologie:

$$^{\mathbf{L}}\mathcal{GH}_k^1\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k=0 \\ (0) & \text{falls } k>0,\ k\equiv 0(2) \\ \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{falls } k \equiv 1(2). \end{cases}$$

– Affine und projektive Grassmann Homologie:

$$^{\mathbf{A}}\mathcal{GH}_k^1\mathbb{F}_q \cong {}^{\mathbf{P}}\mathcal{GH}_k^1\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{falls } k\equiv 0(2) \\ (0) & \text{falls } k>0,\ k \equiv 1(2). \end{cases}$$

- Für Co-Dimensionen $p \geq q$ erhalten wir:
  – Für die lineare Grassmann Homologie:

$$^{\mathbf{L}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{(q-1)^p-1} & \text{falls } k=1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für gerades p und

$$^{\mathbf{L}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k=0 \\ \mathbb{Z}^{(q-1)^p} & \text{falls } k=1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  – Für die affine Grassmann Homologie:

$$^{\mathbf{A}}\mathcal{GH}_k^p\mathbb{F}_q \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\frac{(q-1)^{p+1}+(-1)^p}{q}} & \text{falls } k=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Mittels eines manuellen Matchings wurde berechnet: $^{\mathbf{L}}\mathcal{GH}_*^2\mathbb{F}_3 \cong (0,0,\mathbb{Z}^5)$

Literaturverzeichnis

[Ge] W. Gerdes, Affine Grassmannian Homology and the Homology of General Linear Groups, *Duke Mathematical Journal*, **Vol.61, No.1** (1991), 85-103.

[JW] M. Jöllenbeck, V. Welker, Resolution of the Residue Field via algebraic discrete Morse Theory, 2005.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics), Appendix C (The Weil Conjectures), 1997, *Springer Verlag*.